

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22

Blatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Hat der Vergissfunktork $U: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ einen Linksadjungierten/einen Rechtsadjungierten?

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei K ein Körper und sei W ein K -Vektorraum. Wir betrachten die beiden Funktoren

$$- \otimes W, \text{Hom}(W, -): K\text{-Vect} \rightarrow K\text{-Vect}.$$

Zeigen Sie, dass $- \otimes W$ linksadjungiert zu $\text{Hom}(W, -)$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

- (i) Zeigen Sie, dass Faserbündel stabil unter Pullbacks entlang stetiger Abbildungen sind: Ist $p: E \rightarrow B$ ein Faserbündel und ist $f: B' \rightarrow B$ eine stetige Abbildung, so ist auch die stetige Abbildung $p': f^*E \rightarrow B'$ ein Faserbündel.
- (ii) Auf dem letzten Blatt hatten wir die Kategorie $\text{Cov}(X, x_0)$ der punktierten Überlagerung über einem punktierten Raum eingeführt. Analog kann man auch die Kategorie der unpunktigten Überlagerungen $\text{Cov}(X)$ über einem topologischen Raum X definieren. Begründen Sie nun, dass wir vermöge des ersten Aufgabenteils für jede stetige Abbildung $f: X' \rightarrow X$ einen Funktor $f^*: \text{Cov}(X) \rightarrow \text{Cov}(X')$ erhalten.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche K ist (für einen beliebigen Basispunkt, daher lassen wir diesen in der Notation weg) durch $\pi_1(K) = \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass diese isomorph zu der Gruppe $\langle c, d \mid c^2d^2 \rangle$ ist, indem Sie einen expliziten Isomorphismus angeben.