Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Objekte sind Mengen.

(ii) Morphismen sind Abbildungen.

(iii) Zwischen je zwei Objekten gibt es Morphismen.

(iv) Funktoren lassen sich als Morphismen von Kategorien auffassen.

(v) Funktoren erhalten Isomorphismen.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(i) Seien G und H zwei Gruppen. Wir fassen diese als Kategorien $\underline{G}$ und $\underline{H}$ mit jeweils einem Objekt auf. Zeigen Sie, dass ein Funktor $F\colon \underline{G} \to \underline{H}$ dasselbe ist wie ein Gruppenhomomorphismus von G nach H. Was ist eine natürliche Transformation zweier Funktoren $F, G\colon \underline{G} \to \underline{H}$?

(ii) Sei R ein Ring (hier stets kommutativ und mit 1). Zeigen Sie, dass man die Zuordnung $R \mapsto \mathrm{GL}_n(R)$ für jedes $n \geq 1$ als einen Funktor $\mathrm{GL}_n\colon \mathrm{Ring} \to \mathrm{Grp}$ auffassen kann, sodass die Determinante eine natürliche Transformation $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ definiert.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei homotopieäquivalente gut zusammenhängende punktierte topologische Räume.

(i) Zeigen Sie, dass auch die universellen Überlagerungen $(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ und $(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ homotopieäquivalent sind.

(ii) Folgern Sie, dass $T^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$ asphärisch ist, also dass die universelle Überlagerung von $T^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$ zusammenziehbar ist.

bitte wenden

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 11

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei (X, x_0) ein gut zusammenhängender punktierter topologischer Raum. Wir betrachten nun zwei Kategorien:

- $\mathrm{Cov}(X, x_0)$, die Kategorie der punktierten Überlagerungen $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit wegzusammenhängendem Totalraum von (X, x_0). Ein Morphismus von $p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ nach $p'\colon (Y', y_0') \to (X, x_0)$ ist eine punktierte stetige Abbildung $f\colon (Y, y_0) \to (Y', y_0')$ mit $p' \circ f = p$. Automorphismen in $\mathrm{Cov}(X, x_0)$ sind also genau die Decktransformationen.

- $\mathrm{Sub}(\pi_1(X, x_0))$, die Kategorie der Untergruppen von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ mit Inklusionen als Morphismen.

Zeigen Sie, dass die Bildung der charakterischen Untergruppe einer Überlagerung einen Funktor $\mathrm{Char}\colon \mathrm{Cov}(X, x_0) \to \mathrm{Sub}(\pi_1(X, x_0))$ liefert, welcher eine Äquivalenz von Kategorien ist.