Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

# Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 13

Abgabe der Lösungen bis zum 21.01.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 13.2 und 13.3 ab. Die anderen Aufgaben sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

**Aufgabe 13.1**

Sei $G = \prod_{i \in I} G_i$ das cartesische Produkt einer Familie $G_i$, $i \in I$, von Gruppen, mit kanonischen Projektionen $\pi_i : G \to G_i$ für $i \in I$. Eine Gruppe heißt *subcartesisches Produkt* der $G_i$, $i \in I$, falls sie isomorph zu einer Untergruppe $H \leq G$ mit $H\pi_i = G_i$ für alle $i \in I$ ist.

(a) Zeigen Sie: Eine Gruppe ist residuell endlich genau dann, wenn sie ein subcartesisches Produkt von endlichen Gruppen ist.

(b) Zeigen Sie: Die Klasse aller perfekten Gruppen ist abgeschlossen unter cartesischen Produkten, aber *nicht* abgeschlossen unter subcartesischen Produkten.

(*Hinweis*: Betrachten Sie beispielsweise $\mathrm{SL}(2,5) \times \mathrm{SL}(2,5)$.)

**Aufgabe 13.2** (4 Punkte)

Ein (linearer) *Charakter* $\chi : A \to \mathbb{C}^\times$, $a \mapsto \chi(a)$ einer abelschen Gruppe $A$ ist ein Homomorphismus von $A$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$.[1] Die Menge $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ aller Charaktere von $A$ bildet bzgl. der Verknüpfung

$$(\chi_1\chi_2)(a) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a) \qquad \text{für } \chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times) \text{ und } a \in A$$

eine Gruppe, die sogenannte *Charaktergruppe* $A^*$.

(a) Beschreiben Sie für eine endliche zyklische Gruppen $A = \langle a \rangle \cong C_n$ explizit alle Charaktere $\chi : A \to \mathbb{C}^\times$. Folgern Sie in diesem Fall: $A \cong A^*$.

(b) Zeigen Sie: Aus $A = B \times C$ folgt $A^* \cong B^* \times C^*$.

(c) Folgern Sie: Für jede endliche abelsche Gruppe $A$ gilt $A \cong A^*$.

(d) Erläutern Sie, warum für $A \cong C_\infty$ nicht ebenfalls $A \cong A^*$ gilt.

**Aufgabe 13.3** (4 Punkte)

Sei $G$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $n = |G : H| < \infty$. Sei $K$ ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \nmid n$, und sei $M$ ein $KG$-Modul.

Zeigen Sie: Ist $M$ als $KH$-Modul vollständig zerlegbar, so ist $M$ auch als $KG$-Modul vollständig zerlegbar.

*Hinweis*: Argumentieren Sie ähnlich wie in dem Beweis zu dem Satz von Maschke, der dem Spezialfall $H = 1$ entspricht. Denken Sie zunächst an den Fall $\dim_K(M) < \infty$; überlegen Sie anschließend, wie Sie diese Zusatzannahme, z. B. mit Ergebnissen aus Abschnitt 3 der Vorlesung umgehen können.

Bitte wenden!

[1] Charaktere werden traditionsgemäß von links auf Elemente von $A$ angewandt.

Die letzten drei Aufgaben sind optional; sie liefern einen alternativen Zugang zu der Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen.

**Aufgabe 13.4**

Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k,l}(\mathbb{Z})$, und sei $r$ der Rang von $A$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie per Induktion nach $k + l$: Es existieren $B \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ und $C \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{Z})$ dergestalt, dass gilt:

$$BAC = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N} \text{ mit } n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_r.$$

*Hinweis*: Sei $A \neq 0$. Wählen Sie für $n_1$ den größten gemeinsamen Teiler aller Einträge von $A$, und zeigen Sie, z. B. per Induktion nach $\min\{|a_{ij}| \mid a_{ij} \neq 0\}$, dass Sie durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen erreichen können, dass der $(1,1)$-Eintrag von $A$ ohne Einschränkung bereits den Wert $n_1$ hat. Argumentieren Sie nun per Induktion nach $k + l$.

**Aufgabe 13.5**

Sei $M = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_l \cong \mathbb{Z}^l$ eine additive geschriebene freie abelsche Gruppe von endlichem Rang $l$, oder äquivalent: ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $l$. Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k,l}(\mathbb{Z})$ schreiben wir $M_A = \mathbb{Z}f_1 + \ldots + \mathbb{Z}f_k \leq M$, wobei $f_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} e_j$ für $1 \leq i \leq k$ sei.

(a) Zeigen Sie: Für $B \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ gilt $M_{BA} = M_A$ und folglich $M/M_A = M/M_{BA}$.

(b) Zeigen Sie: Für $C = (c_{ij}) \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{Z})$ gibt es genau einen Modul-Automorphismus $M \to M$ mit $e_i \mapsto \sum_{j=1}^{l} c_{ij} e_j$ für $1 \leq i \leq l$. Folglich gilt $M/M_A \cong M/M_{AC}$.

(c) Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 13.4: Es existieren $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_r$, so dass gilt:

$$M/M_A \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{l-r \text{ Faktoren}}.$$

**Aufgabe 13.6**

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 13.5 (und unabhängig von dem entsprechenden Resultat aus der Vorlesung): Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zu einem Produkt von zyklischen Gruppen

$$C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r} \times \underbrace{C_\infty \times \ldots \times C_\infty}_{s \text{ Faktoren}},$$

wobei $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_1 \mid \dots \mid n_r$ sind.