Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 11

Abgabe der Lösungen bis zum 07.01.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 11.1 und 11.3 ab. Die anderen Aufgaben sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Sei G eine residuell endliche Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Jede Untergruppe $H \leq G$ ist residuell endlich.

(b) Bestimmen Sie, welche der nachfolgenden Gruppen residuell endlich sind:

$$\mathbb{Z}_+, \quad \mathbb{Q}_+, \quad \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \quad \coprod_{p\in\mathbb{P}} C_p.$$

Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie: Ist jedes endliche Bild von G abelsch, so ist G abelsch. Aber, ist jedes endliche Bild von G zyklisch, so ist G nicht notwendigerweise zyklisch.

Aufgabe 11.2

Sei $G = \langle x, y\rangle$ eine *endliche* Gruppe, und es gelte $x^{-1}y^2x = y^3$.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{ord}(y)$ ist teilerfremd zu 6.

(b) Zeigen Sie weiter: $\langle y\rangle = [G,G] \trianglelefteq G$, und $G/[G,G]$ ist ebenfalls zyklisch.

(c) Beweisen Sie: Die Kommutatoruntergruppe der *Baumslag-Solitar-Gruppe* $BS(2,3) = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^3\rangle$ ist unendlich, aber nicht zyklisch.

(d) Zeigen Sie weiter: Wäre die Gruppe $BS(2,3)$ residuell endlich, so wäre ihre Kommutatorgruppe abelsch.

Hinweis: Erweitern Sie geeignet die Aussage in Aufgabe 11.1 (c). Tatsächlich ist $BS(2,3)$ *nicht* residuell endlich.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Sei G eine endlich erzeugte residuell endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ ebenfalls residuell endlich ist.

Hinweis: Finden Sie für $1 \neq \alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ und $g \in G$ mit $g^\alpha \neq g$ (zunächst einen Normalteiler und dann) eine charakteristische Untergruppe M von endlichem Index in G mit $g^{-1}g^\alpha \notin M$. Beachten Sie weiter, dass $\mathrm{Aut}(G)$ auf G/M operiert.

Aufgabe 11.4

(a) Betrachten Sie die Gruppe $G = \mathrm{Alt}(4)$ und $N = \langle(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\rangle \trianglelefteq G$. Verwenden Sie das Verfahren aus dem Beweis von Halls Satz 4.28, um explizit eine endliche Präsentation für G aus geeigneten Präsentationen für G/N und N zu berechnen.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie wie in (a) eine endliche Präsentation für die Gruppe

$$G = \mathbb{Z}^m \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \qquad \text{mit Normalteiler } N = \mathbb{Z}^m,$$

wobei $\varphi\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^m)$ durch $\overline{k}^\varphi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$, $(z_{\overline{1}}, \ldots, z_{\overline{m}}) \mapsto (z_{\overline{1-k}}, \ldots, z_{\overline{m-k}})$ für $\overline{k} = k + m\mathbb{Z}$ gegeben ist; hierbei sind die Indizes geeignet "modulo m" zu lesen.

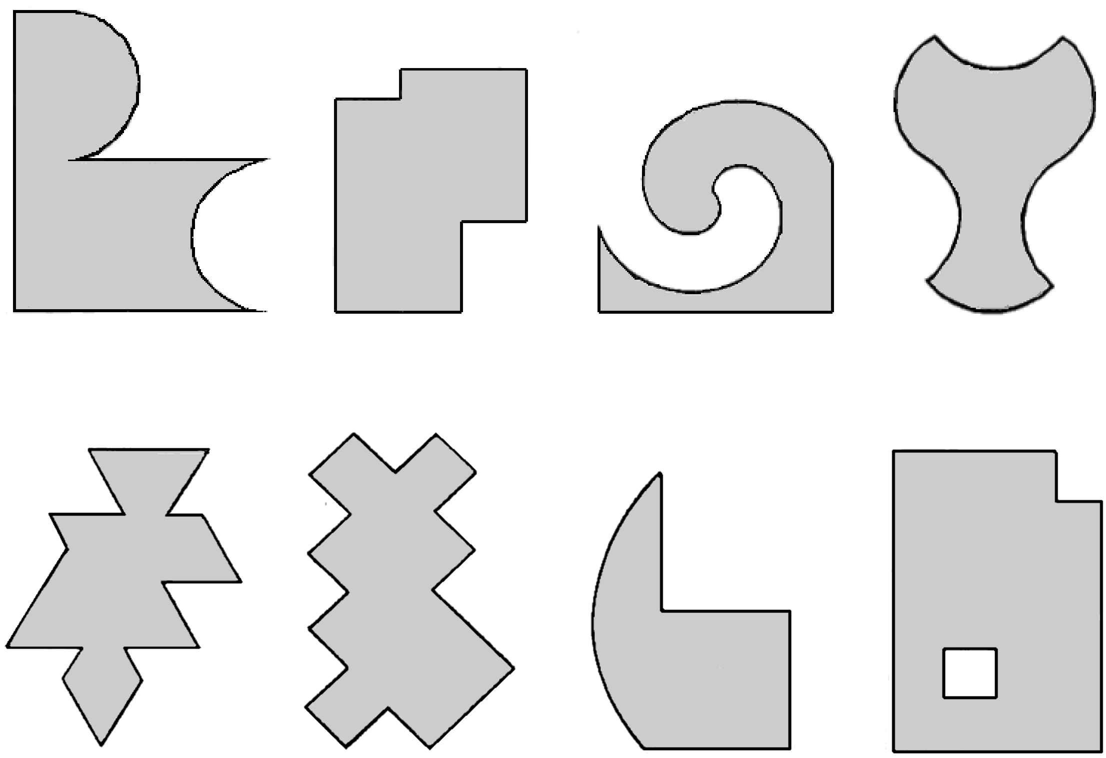
Bitte wenden!

Weihnachtsrätsel. Aus dem hohen Norden ist folgendes Rätsel überliefert.

Hier ist ein Weihnachtsrätsel, mit dem sich die ganze Familie beschäftigen kann, wenn über die Feiertage 'mal Langeweile aufkommen sollte.

Hänsel und Gretel haben acht flache Lebkuchen gebacken, die die untenstehenden Formen haben. Zu Weihnachten wollen sie sich die Lebkuchen äußerst gerecht teilen: Jede Form soll mit einem einzigen (nicht notwendig geradlinigen) Schnitt in zwei Teile zerschnitten werden, die dann genau deckungsgleich sind.

Am schönsten wäre es, wenn man die Hälften nicht umklappen müßte, um sie zur Deckung zu bringen; zur Not ist das aber auch erlaubt, da die Lebkuchen von oben und unten nahezu gleich beschaffen sind.



Wer kann Hänsel und Gretel helfen?

Frohe Weihnachten und kommen Sie gut ins neue Jahr!