Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 9

Abgabe der Lösungen bis zum 10.12.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 9.1, 9.3 und 9.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 9.2 und 9.4 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 9.1

Zeigen Sie, dass eine freie Gruppe F mit freiem Erzeugendensystem X der Mächtigkeit $|X| \geq 2$ stets ein triviales Zentrum hat.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit $N \trianglelefteq G$ und G/N frei. Zeigen Sie, dass N ein Komplement H in G besitzt, so dass $G = H \ltimes N$ gilt.

Hinweis: Wählen Sie $Y \subseteq G$ dergestalt, dass $Y \to G/N$, $y \mapsto yN$ eine Bijektion von Y auf ein freies Erzeugendensystem von G/N liefert, und betrachten Sie $H = \langle Y \rangle$.

Aufgabe 9.3

Sei $d \in \mathbb{N}$, und sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem X der Mächtigkeit $d = |X| < \infty$. Die *Länge* eines Elementes $g \in F$, geschrieben in Normalform $g = x_1^{l_1} \cdots x_s^{l_s}$ bezüglich X, sei $\ell(g) = |l_1| + \ldots + |l_s|$.
Berechnen Sie, für $n \in \mathbb{N}_0$, die Anzahlen $A_n(F) = \#\{g \in F \mid \ell(g) \leq n\}$.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem X. Wie üblich bezeichne $[F,F]$ die Kommutatoruntergruppe von F. Für $x \in X$ und $g \in F$, geschrieben in Normalform $g = x_1^{l_1} \cdots x_s^{l_s}$ bezüglich X, seien $J_x(g) = \{j \mid 1 \leq j \leq s,\ x_j = x\}$ und $\sigma_x(g) = \sum_{j \in J_x(g)} l_j$.
Zeigen Sie: Es gilt $g \in [F,F]$ genau dann, wenn $\sigma_x(g) = 0$ für alle $x \in X$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $F \to \coprod_{x \in X} \mathbb{Z}$, $g \mapsto (\sigma_x(g))_x$.

Aufgabe 9.5

Sei F eine freie Gruppe.

(1) Zeigen Sie: F ist torsionsfrei.

(2) Sei $H \leq F$ mit $|F : H| < \infty$, und sei $1 \neq K \leq F$. Zeigen Sie: $H \cap K \neq 1$.