Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 8

Abgabe der Lösungen bis zum 03.12.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgabe 8.3 ist mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 8.1 und 8.2 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Sei $G = \mathbb{Q}$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Die Gruppe G ist charakteristisch einfach.

(b) Die Gruppe G kann nicht als direktes Produkt von einfachen Gruppen geschrieben werden.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, sei $r \in \mathbb{N}$ und sei $G = \mathrm{UT}_{r+1}(R) \le \mathrm{GL}_{r+1}(R)$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen über R mit Einträgen 1 auf der Diagonalen. Schreibe $I \in \mathrm{Mat}_{r+1}(R)$ für die Einheitsmatrix, und $E_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r+1}(R)$ für die Elementarmatrix mit Eintrag 1 in der (i,j)-Position und Einträgen 0 überall sonst. Zeigen Sie:

(a) Für $k \in \{1, \dots, r+1\}$ gilt für den $k$ten Term der absteigenden Zentralreihe:

$$\gamma_k G = \langle I + aE_{i,j} \mid a \in R,\ 1 \le i,j \le r+1,\ j-i \ge k \rangle = \left\{ I + \sum\nolimits_{j-i\ge k} a_{i,j} E_{i,j} \mid a_{i,j} \in R \right\}.$$

(b) Die Gruppe G ist nilpotent der Klasse r.

(c) Für $k \in \{1, \dots, r\}$ gilt

$$\gamma_k G / \gamma_{k+1} G \cong R_+ \times \ldots \times R_+,$$

mit $r-k+1$ Faktoren, die jeweils isomorph zur additiven Gruppe R_+ des Ringes sind.

Zusatz: Für das Zentrum von G gilt: $\mathrm{Z}(G) = \gamma_r G = \{I + aE_{1,r+1} \mid a \in R\} \cong R_+$.

Aufgabe 8.3

Sei G eine Gruppe. Die *aufsteigende Zentralreihe* $1 = Z_0(G) \le Z_1(G) \le \ldots$ ist rekursiv durch die Vorgaben $Z_0(G) = 1$ und $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Jeder Term $Z_i(G)$ der aufsteigenden Zentralreihe ist eine charakteristische Untergruppe von G, und belegen Sie durch ein geeignetes Beispiel, dass $Z_i(G)$ im allgemeinen nicht vollständig invariant in G zu sein braucht.

(b) Ist $c \in \mathbb{N}_0$ mit $Z_c(G) = G$, dann gilt $\gamma_{i+1} G \le Z_{c-i}(G)$ für $i \in \{0, 1, \dots, c\}$.

(c) Ist $c \in \mathbb{N}_0$ mit $\gamma_{c+1} G = 1$, dann gilt $\gamma_{c+1-j} G \le Z_j(G)$ für $j \in \{0, 1, \dots, c\}$.

(d) G ist nilpotent der Klasse c genau dann, wenn $1 = Z_0(G) \lneqq \ldots \lneqq Z_c(G) = G$ gilt.