Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis zum 26.11.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 7.1 und 7.2 sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 7.3 und 7.4 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 7.1

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q = p^{2m}$ Elementen, wobei $p = \mathrm{char}(K) > 2$ sei. Sei $X = K \cup \{\infty\}$ die „projektive Gerade" mit $q+1$ Punkten. Die Abbildung $\sigma\colon K \to K$, $x \mapsto x^{p^m}$ stellt einen Körperautomorphismus der Ordnung 2 dar. Setze $\infty^\sigma = \infty$. Sei $M(q)$ die Menge aller Transformationen

$$\alpha\colon X \to X, \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in K \text{ und } ad-bc \neq 0 \text{ ein Quadrat in } K,$$

und aller Transformationen

$$\alpha\colon X \to X, \quad x \mapsto \frac{ax^\sigma+b}{cx^\sigma+d} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in K \text{ und } ad-bc \text{ kein Quadrat in } K.$$

Setzte $S(q) = \mathrm{St}_{M(q)}(\infty)$. Zeigen Sie:

(a) $M(q)$ bildet eine Untergruppe in $\mathrm{Sym}(X)$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} S(q) = \{\alpha \in M(q) \mid \exists a,b \in K, a \neq 0 \text{ ein Quadrat in } K\ \forall x \in X : x^\alpha = ax+b\} \\ \cup \{\alpha \in M(q) \mid \exists a,b \in K, a \text{ kein Quadrat in } K\ \forall x \in X : x^\alpha = ax^\sigma+b\}. \end{aligned}$$

(c) Die Gruppe $S(q)$ operiert scharf 2-fach transitiv auf K.

(d) Die Gruppe $M(q)$ operiert scharf 3-fach transitiv auf X, insbesondere ist dann $|M(q)| = (q-1)q(q+1)$.

Bemerkung. Ähnliche Gruppen $L(q)$ wurden in Aufgabe 6.4 behandelt. Es lässt sich zeigen: Zwischen den Familien von scharf 3-fach transitiven Gruppen $L(q)$ und $M(q)$ bestehen keine Isomorphien. Ein Resultat von Zassenhaus liefert: Jede scharf 3-fach transitive endliche Permutationsgruppe ist äquivalent zu einer der Gruppen $L(q)$ oder $M(q)$.

Aufgabe 7.2

Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper der Charateristik p, und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Gruppe $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen 1 auf der Diagonalen eine Sylow-p-Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

(a) Sei $G \neq 1$ eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $|G|$. Sei $H \leq G$ mit $|G : H| = p$. Zeigen Sie: $H \trianglelefteq G$.

(b) Sei G eine endliche Gruppe, $K \trianglelefteq G$ und P eine Sylow-p-Untergruppe von K, zu einer Primzahl p. Der *Normalisator* von P in G ist die Gruppe $\mathrm{N}_G(P) = \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$. Zeigen Sie: $G = \mathrm{N}_G(P)\,K$.

(c) Sei G eine endliche Gruppe und P eine Sylow-p-Untergruppe von G, zu einer Primzahl p. Weiter sei P *subnormal* in G, d. h., es gelte

$$P \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_m = G$$

für geeignetes $m \in \mathbb{N}$ und Untergruppen $H_1, \ldots, H_m \leq G$. Zeigen Sie: $P \trianglelefteq G$.

Bemerkung. Die Aussage in (b) ist als *Frattini-Argument* bekannt.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Sei $G \neq 1$ eine endlich erzeugte Gruppe. Zeigen Sie, unter Verwendung des Zornschen Lemmas: G besitzt einen maximalen Normalteiler $N \trianglelefteq G$, so dass G/N eine endlich erzeugte einfache Gruppe ist.

Bemerkung. Ist G eine endlich erzeugte Gruppe, die keine nicht-trivialen endlichen Faktorgruppen besitzt, so folgt die Existenz von endlich erzeugten, unendlichen einfachen Gruppen.