

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 6

Abgabe der Lösungen bis zum 19.11.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 6.3 und 6.4 ab; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/.

Sei $G \leq \text{Sym}(X)$ eine Permutationsgruppe, für $X \neq \emptyset$. Dann heißt $\{x^\pi \mid \pi \in G\}$ die G -Bahn von $x \in X$. Der *Stabilisator*¹ von $x \in X$ ist $\text{St}_G(x) = \{\pi \in G \mid x^\pi = x\} \leq G$. Die Permutationsgruppe G heißt *transitiv* auf X , falls es zu $x, y \in X$ stets ein $\pi \in G$ mit $x^\pi = y$ gibt. Die Gruppe G heißt *semi-regulär*, falls $\text{St}_G(x) = 1$ für alle $x \in X$ gilt. Ist G transitiv und semi-regulär, so heißt G eine *reguläre* Permutationsgruppe.

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |X|$ bezeichne $X^{[k]}$ die Menge aller Tupel $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ mit paarweise verschiedenen Einträgen. Dann operiert G in natürlicher Weise auf $X^{[k]}$, d.h., wir erhalten einen Homomorphismus $G \rightarrow \text{Sym}(X^{[k]})$, vermöge $(x_1, \dots, x_k)^\pi = (x_1^\pi, \dots, x_k^\pi)$ für $(x_1, \dots, x_k) \in X^{[k]}$ und $\pi \in G$. Operiert G transitiv bzw. regulär auf $X^{[k]}$, so heißt G eine *k-fach transitive* bzw. *scharf k-fach transitive* Permutationsgruppe.

Aufgabe 6.1

Sei $G \leq \text{Sym}(X)$ eine Permutationsgruppe; dabei gelte $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Sei $x \in X$. Dann liefert $\Phi: \text{St}_G(x) \backslash G \rightarrow X$, $\text{St}_G(x)\pi \mapsto x^\pi$ eine G -äquivalente Bijektion zwischen den Rechtsnebenklassen von $\text{St}_G(x)$ in G und der G -Bahn von x . Äquivarianz bedeutet hierbei: $(\text{St}_G(x)\pi \cdot \sigma)\Phi = (x^\pi)^\sigma = ((\text{St}_G(x)\pi)\Phi)^\sigma$ für $\pi, \sigma \in G$. Insbesondere hat die G -Bahn von x die Länge $|G : \text{St}_G(x)|$.

(b) Ist G transitiv, so gilt $|G| = |X| |\text{St}_G(x)|$ für jedes $x \in X$.

(c) Ist G regulär, so gilt $|G| = |X|$, und die Wirkung von G auf X ist äquivalent zu der Wirkung von G auf sich per Rechtsmultiplikation, d.h., es gibt eine G -äquivalente Bijektion zwischen X und G (bzgl. Rechtsmultiplikation).

Aufgabe 6.2

Sei $G \leq \text{Sym}(X)$ eine Permutationsgruppe; dabei gelte $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in X$ und $\pi \in G$ gilt: $\text{St}_G(x^\pi) = \text{St}_G(x)^\pi = \pi^{-1} \text{St}_G(x) \pi$.

(b) Ist G transitiv und abelsch, so ist G regulär.

Aufgabe 6.3

(4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die symmetrische Gruppe $\text{Sym}(n)$ ist scharf n -fach transitiv.

(b) Sei $1 \leq k \leq n$, und $G \leq \text{Sym}(n)$ eine k -fach transitive Permutationsgruppe. Dann teilt $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ die Ordnung $|G|$, und G ist scharf k -fach transitiv genau dann, wenn $|G| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ist.

(c) Für $n \geq 3$ ist die alternierende Gruppe $\text{Alt}(n)$ scharf $(n-2)$ -fach transitiv.

(d) Für $n \geq 3$ sind $\text{Sym}(n)$ und $\text{Alt}(n)$ die einzigen $(n-2)$ -fach transitiven Permutationsgruppen vom Grad n .

¹auch: *Isotropie-* oder *Standuntergruppe*

Aufgabe 6.4

(4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper und $X = K \cup \{\infty\}$ die „projektive Gerade“ mit $q + 1$ Punkten. Sei $L(q)$ die Gruppe aller *gebrochen linearen Transformationen*

$$\alpha: X \rightarrow X, \quad x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in K \text{ und } ad - bc \neq 0.$$

(Hierbei werden die zweckmäßigen Rechenregeln $y + \infty = \infty$, $y/0 = \infty$, $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$ etc. verwendet.) Setze $H(q) = \text{St}_{L(q)}(\infty)$. Zeigen Sie:

(a) Die Gruppe $L(q)$ ist isomorph zu $\text{PGL}(2, K)$, insbesondere gilt $|L(q)| = (q-1)q(q+1)$.

(b) Es ist $H(q) = \{\alpha \in L(q) \mid \exists a, b \in K, a \neq 0 \forall x \in X : x^\alpha = ax + b\}$.

(c) Die Gruppe $H(q)$ operiert scharf 2-fach transitiv auf K .

(d) Die Gruppe $H(q)$ operiert (außer wenn $q = 2$) nicht regulär auf K , aber jedes Element $\alpha \in H(q) \setminus \{\text{id}_K\}$ hat höchstens einen Fixpunkt in K . Die fixpunktfreien Transformationen von $H(q)$ bilden zusammen mit id_X einen Normalteiler von $H(q)$.

(e) Die Gruppe $L(q)$ operiert scharf 3-fach transitiv auf X .

Bemerkung: Aufgabenteile (c) und (d) zeigen, dass $H(q) \leq \text{Sym}(K)$ eine sogenannte *Frobenius-Gruppe* ist.

Aufgabe 6.5

Zeigen Sie: $\text{PSL}(2, 2) \cong \text{Sym}(3)$, $\text{PSL}(2, 3) \cong \text{Alt}(4)$ und $\text{PSL}(2, 4) \cong \text{Alt}(5)$.

Zeigen Sie weiter: $\text{PSL}(2, 5) \cong \text{Alt}(5)$.

(*Hinweis:* Betrachten Sie für $\text{PSL}(2, 3)$ und $\text{PSL}(2, 4)$ jeweils die natürliche Wirkung der Gruppe auf der projektiven Geraden. Arbeiten Sie für $\text{PSL}(2, 5)$ mit den Sylow-2-Untergruppen.)