Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 5

Abgabe der Lösungen bis zum 12.11.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Dieses Blatt dient zur Auffrischung der Sylowschen Sätze, die bereits in der Algebra-Vorlesung behandelt werden. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 5.5 und 5.7 ab. Die übrigen Aufgaben bereiten Sie mündlich vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Die Aufgaben 5.1 bis 5.4 liefern einen Beweis der Sylowschen Sätze; in den Aufgaben 5.5 bis 5.7 geht es um konkrete Anwendungen.

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Die Ordnung von G sei $|G| = p^a m$, wobei $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p sei. Nach dem Satz von Lagrange ist p^a die maximale Ordnung einer p-Untergruppe von G. Eine *Sylow-p-Untergruppe* von G ist eine Untergruppe der Ordnung p^a. Die Sylowschen Sätze besagen:

(i) Jede p-Untergruppe von G ist in wenigstens einer Sylow-p-Untergruppe enthalten.

(ii) Die Anzahl n_p der Sylow-p-Untergruppen von G teilt $|G|$ und erfüllt $n_p \equiv_p 1$.

(iii) Je zwei Sylow-p-Untergruppen von G sind zueinander konjugiert in G.

Folglich sind die Sylow-p-Untergruppen genau die $\subseteq$-maximalen p-Untergruppen von G, und je zwei Sylow-p-Untergruppen von G sind isomorph zueinander.

Aufgabe 5.1

Weisen Sie mit Hilfe der untenstehenden Anleitung die Existenz einer Sylow-p-Untergruppe P von G nach.

Anleitung: Die Gruppe G operiert per Rechtsmultiplikation auf der Menge $\Omega = \{X \subseteq G \mid |X| = p^a\}$. Die Mächtigkeit $|\Omega| = \binom{p^a m}{p^a}$ von Ω ist nicht durch p teilbar; folglich finden wir eine G-Bahn $B \subseteq \Omega$, deren Länge nicht durch p teilbar ist. Wähle $X \in B$ und setzte $P = \mathrm{Stab}_G(X)$. Dann gilt $p \nmid |B| = |G : P|$, und folglich $p^a \mid |P|$. Andererseits permutiert P durch Rechtsmultiplikation die Elemente von X. Ist $x \in X$ und sind $g, h \in P$ mit $xg = xh$, so gilt offenbar $g = h$; folglich hat P höchstens $|X| = p^a$ Elemente, und $|P| = p^a$.

Aufgabe 5.2

Sei $\mathcal{S} = \{P^g \mid g \in G\}$ die Menge aller zu P in G konjugierten Untergruppen, und setze $n_P = |\mathcal{S}|$. Zeigen Sie mit Hilfe der untenstehenden Anleitung: n_P teilt $|G|$ und $n_P \equiv_p 1$.

Anleitung: Die Gruppe P operiert per Konjugation auf $\mathcal{S}$. Folgern Sie, dass die Längen der P-Bahnen in $\mathcal{S}$ jeweils p-Potenzen sind. Es genügt dann, zu zeigen, dass dabei $\{P\}$ die einzige P-Bahn der Länge 1 ist.
Betrachten Sie dazu eine beliebige P-Bahn $\{Q\}$ der Länge 1. Zeigen Sie $Q \trianglelefteq \langle P \cup Q \rangle = PQ$ sowie $|PQ| \leq p^a$. Schlussfolgern Sie daraus $P = Q$.

Aufgabe 5.3

Sei nun P_1 eine beliebige p-Untergruppe von G. Zeigen Sie mit Hilfe der untenstehenden Anleitung: P_1 ist in einer zu P konjugierten Untergruppe von G enthalten.

Anleitung: Widerspruchsannahme: P_1 ist in keinem $Q \in \mathcal{S}$ enthalten. Die Gruppe P_1 operiert per Konjugation auf $\mathcal{S}$. Zeigen Sie, ähnlich wie in der vorherigen Aufgabe, dass es nunmehr keine P_1-Bahnen der Länge 1 in $\mathcal{S}$ gibt, folglich die Länge jeder P_1-Bahn eine von 1 verschiedene p-Potenz ist. Leiten Sie daraus den Widerspruch $n_P \equiv_p 0$ her.

Aufgabe 5.4

Fassen Sie die Ergebnisse der Aufgaben 5.1, 5.2 und 5.3 geeignet zusammen, um einen vollständigen Beweis der anfangs angegebenen Sylowschen Sätze zu erhalten.

Aufgabe 5.5 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ mit $n = |G : H| < \infty$. Sei $K = \bigcap\{H^g \mid g \in G\}$ das Kernstück von H in G. Zeigen Sie: $|G : K|$ ist ein Teiler von $n!$.

(*Hinweis*: Betrachten Sie den Homomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(X)$, wobei G auf dem Nebenklassenraum $X = H\backslash G$ durch Rechtsmultiplikation operiert.)

Aufgabe 5.6

(a) Sei G eine endliche Gruppe, und sei p eine Primzahl. Sei $P \leq G$ eine Sylow-p-Untergruppe von G. Zeigen Sie: G besitzt nur diese eine Sylow-p-Untergruppe genau dann, wenn $P \trianglelefteq G$ ist.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 30.

(c) Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 36.

Aufgabe 5.7 (4 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung der untenstehenden Anleitung: Bis auf Isomorphie ist $\mathrm{Alt}(5)$ die einzige einfache Gruppe der Ordnung 60.

Anleitung: Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Dann besitzt G keine Untergruppen vom Index $2, 3, 4$; vgl. Aufgabe 5.5.
Zeigen Sie mit Hilfe der Sylowschen Sätze zunächst: G besitzt 6 Untergruppen der Ordnung 5 und 10 Untergruppen der Ordnung 3. Folglich verbleiben in G noch 15 Elemente mit Ordnung ungleich $1, 3, 5$. Zeigen Sie: G enthält entweder 5 oder 15 Untergruppen der Ordnung 4. Sind $P \overset{\neq}{,} Q \leq G$ Untergruppen der Ordnung 4 mit $|P \cap Q| \geq 2$, so ist $1 \neq P \cap Q \trianglelefteq \langle P \cup Q \rangle$ und $\langle P \cup Q \rangle$ hat Index 5 in G. Gilt andererseits $|P \cap Q| = 1$ für alle Untergruppen $P \overset{\neq}{,} Q \leq G$ der Ordnung 4, so gibt es genau 5 Untergruppen der Ordnung 4, und wieder existiert eine Untergruppe vom Index 5 in G, nämlich $N_G(P) = \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$ für $P \leq G$ mit $|P| = 4$.
Ist $H \leq G$ mit $|G : H| = 5$, so ist G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(5)$. Schließen Sie nun $G \cong \mathrm{Alt}(5)$.