Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 05.11.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 4.1 und 4.3 ab. Die übrigen Aufgaben sind mündlich vorzubereiten; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppen sich jeweils als halbdirektes Produkt von echten Untergruppen schreiben lassen:

(a) $\mathrm{Sym}(3)$, (b) D_8, (c) C_{15}, (d) Q_8.

Hierbei bezeichnet $Q_8 = \langle i, j \rangle$ mit $i^4 = 1$ und $i^2 = j^2 = [i, j]$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8; explizit kann $Q_8 \leq \mathrm{Sym}(8)$ durch $i = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$, $j = (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$ erzeugt werden.

Zusatz: Was passiert für $\mathrm{Sym}(n)$ bzw. D_{2n} für allgemeine $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 4.2

(a) Fertigen Sie eine Liste aller Elemente der Gruppe $\mathrm{Alt}(4)$ und ihrer Ordnungen an.

(b) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{Alt}(4)$ lässt sich als halbdirektes Produkt von zwei echten Untergruppen schreiben. Bestimmen Sie die Ordnungen der beteiligten Untergruppen.

(c) Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Alt}(4)$ keine Untergruppe der Ordnung 6 enthält.

(*Hinweis*: Für Teil (c) können Sie (b) verwenden; gucken Sie sich dazu den von Ihnen bestimmten Normalteiler N und die Konjugationswirkung des Komplements auf N an.)

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen, alle Hauptreihen, alle charakteristischen Hauptreihen und alle vollinvarianten Hauptreihen für die Diedergruppe $G = D_{10}$.

Zusatz: Ist jede Untergruppe von D_{10} subnormal in D_{10}? Für welche Diedergruppen D_{2n}, $n \in \mathbb{N}$, ist jede Untergruppe von D_{2n} subnormal in D_{2n}?

Aufgabe 4.4

Sei G eine Gruppe mit Operatoren Ω. Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung: Eine Ω-Reihe für G ist eine Ω-Kompositionsreihe genau dann, wenn alle ihre Faktoren Ω-einfach sind.

Aufgabe 4.5

(a) Finden Sie ein Beispiel einer abelschen und einer nicht-abelschen Gruppe, die (inklusive Multiplizitäten) dieselben Kompositionsfaktoren haben.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$ mit Kompositionsfaktoren C_5, C_7 und C_{13}. Zeigen Sie: $G \cong C_5 \times C_7 \times C_{13}$.