Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 29.10.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 3.2 bis 3.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 3.1 und 3.6 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D_8)$ der Diedergruppe D_8. Folgern Sie: $\mathrm{Inn}(D_8) \lneqq \mathrm{Aut}(D_8)$, aber $\mathrm{Aut}(D_8) \cong D_8$.

Aufgabe 3.2

Beschreiben Sie soweit wie möglich die Struktur der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D_{2n})$ der Diedergruppe D_{2n} für $n \geq 3$.
(*Hinweis*: Fangen Sie mit kleinen Werten $n \in \{3,4,5\}$ an und verwenden Sie den Ansatz aus der Vorlesung. Welche Ordnung hat $\mathrm{Aut}(D_{2n})$? Welche Normalteiler finden Sie? Ggf. welche Zerlegungen als halbdirektes Produkt?)

Aufgabe 3.3

Sei G eine endliche Gruppe. Die kleinste Anzahl von Elementen, aus denen sich G erzeugen lässt, sei mit $d(G)$ bezeichnet. Zeigen Sie: $d(G) \leq \log_2 |G|$.

Zusatz: Lässt sich die Abschätzung, zumindest für hinreichend große $|G|$, noch verbessern?

Aufgabe 3.4

Seien H, K Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass $|HK||H \cap K| = |H| \cdot |K|$ ist. Folgern Sie: Ist zusätzlich $\mathrm{ggT}(|G : H|, |G : K|) = 1$, so gilt: $G = HK$.

Aufgabe 3.5

Sei p eine Primzahl, und sei G eine endliche abelsche Gruppe mit der Eigenschaft $x^p = 1$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie: G ist ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen der Ordnung p.

Bemerkung: Gruppen dieser Art heißen *endliche elementar-abelsche p-Gruppen*.

Aufgabe 3.6 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *subnormal* in G, i. Z. $H \lhd\!\lhd G$, falls es eine endliche aufsteigende Kette von Untergruppen $H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_k = G$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Jeder Subnormalteiler $H \lhd\!\lhd G$ ist bereits ein Normalteiler in G genau dann, wenn jeder Normalteiler eines Normalteilers von G ein Normalteiler von G ist.

(b) Finden Sie konkret eine Gruppe G und $H \lhd\!\lhd G$ mit $H \ntrianglelefteq G$.
(*Hinweis*: Untersuchen Sie $G = D_8$.)

(c) Finden Sie konkret eine Gruppe G und $H \leq G$, ohne dass $H \lhd\!\lhd G$ gilt.