Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 22.10.2024 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 2.1 bis 2.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 2.6 und 2.7 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 2.1
Seien G eine Gruppe, $H, K \leq G$ und $x, y \in G$ mit $Hx = Ky$. Zeigen Sie: $H = K$.

Aufgabe 2.2
Sei X eine endliche Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ bildet bzgl. der symmetrischen Differenz $A \vartriangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$ eine Gruppe $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \vartriangle)$.[1]

(a) Ist die Gruppe $\mathcal{A}$ stets abelsch? Welche Elemente sind Involutionen in dieser Gruppe?

(b) Sei $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid |B| \text{ gerade}\}$. Zeigen Sie: $\mathcal{B}$ bildet eine Untergruppe von $\mathcal{A}$.
Zusatz: Ist $\mathcal{B}$ sogar ein Normalteiler von $\mathcal{A}$?

Aufgabe 2.3
Sei $\mathbb{R}^*$ die multiplikative Gruppe aller reellen Zahlen $x \neq 0$, und sei $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Zeigen Sie: $P \leq \mathbb{R}^*$ ist eine Untergruppe, und bestimmen Sie den Index $|\mathbb{R}^* : P|$.

Aufgabe 2.4
Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Ist $g \in G$ von endlicher Ordnung, so hat auch $g\varphi \in H$ endliche Ordnung und $\mathrm{ord}(g\varphi)$ teilt $\mathrm{ord}(g)$.

(b) Folgern Sie: Sind G und H endlich mit $\mathrm{ggT}(|G|, |H|) = 1$, so ist φ die Einsabbildung: Für alle $g \in G$ gilt $g\varphi = 1$.

Aufgabe 2.5
Zeigen Sie: Die (additive) Gruppe $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine unendliche Torsionsgruppe.

Aufgabe 2.6 (4 Punkte)
Eine Gruppe G heißt *radizierbar*, im Kontext additiver Gruppen gebräuchlicher *teilbar*, wenn für jedes $x \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ (wenigstens) ein $y \in G$ mit $y^n = x$ existiert.

(a) Zeigen Sie: Die (additive) Gruppe $\mathbb{Q}$ ist teilbar.

(b) Zeigen Sie: Jede teilbare endliche abelsche[2] Gruppe ist bereits trivial.

(c) Zeigen Sie: Jede Faktorgruppe einer radizierbaren Gruppe ist radizierbar.

(d) Zeigen Sie: Für $H \lneqq \mathbb{Q}$ ist $|\mathbb{Q} : H| = \infty$.

Aufgabe 2.7 (4 Punkte)
Seien $H \lneqq G$ Gruppen. Zeigen Sie: $G \smallsetminus H$ ist endlich genau dann, wenn G endlich ist.

[1] Dies kann direkt überprüft werden; etwas mühselig ist der Nachweis der Assoziativität.
[2] Die entsprechende Aussage gilt allgemeiner für radizierbare endliche Gruppen.