

## Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 1

Abgabe der Lösungen am 15.10.2019 in der Übungsstunde, um 14:30 Uhr

---

Aufgaben 1.1 bis 1.6 sind Präsenzaufgaben für die ersten Übungsstunden. Bitte geben Sie Lösungen zu den letzten beiden Aufgaben 1.7 und 1.8 ab; weitere Informationen auf

[http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen\\_WS2425/](http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/).

### Aufgabe 1.1

Sei  $G$  eine Gruppe, und es gelte  $x^2 = 1$  für jedes Element  $x \in G$ . Zeigen Sie:  $G$  ist abelsch.

### Aufgabe 1.2

Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $|G|$  gerade. Zeigen Sie, dass  $G$  mindestens eine *Involution*, also ein Element der Ordnung 2 (d.h. ein Element  $x \in G \setminus \{1\}$  mit  $x^2 = 1$ ) enthält.

### Aufgabe 1.3

Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Für alle  $x, y \in G$  und  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $(xy)^m = x^m y^m$ . Gilt diese Identität auch für nicht-abelsche Gruppen?

### Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass keine zwei der additiven Gruppen  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  zueinander isomorph sind. (*Zusatz:* Sind die additiven Gruppen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  isomorph zueinander?)

### Aufgabe 1.5

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Realisieren Sie die Diedergruppe  $D_{2n}$  der Ordnung  $2n$  (d.h. eine zu  $D_{2n}$  isomorphe Gruppe) als Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $\text{Sym}(n)$ .

### Aufgabe 1.6

Beweisen Sie den Satz von Wilson: Für jede Primzahl  $p$  gilt die Kongruenz  $(p-1)! \equiv_p -1$ . (*Hinweis:* Betrachten Sie die Kongruenz als eine Gleichung in der multiplikativen Gruppe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  des Restklassenringes  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .)

### Aufgabe 1.7

(4 Punkte)

Sei  $X$  eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe  $\text{Sym}(X)$  abelsch ist genau dann, wenn  $|X| \leq 2$  gilt.

### Aufgabe 1.8

(4 Punkte)

(a) Beschreiben Sie die Elemente und die Verknüpfung in der Isometriegruppe  $\text{Isom}(X)$  des metrischen Raumes  $X = \mathbb{R}$  bzgl. des gewöhnlichen euklidischen Abstandes  $d(x, y) = |x - y|$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(*Hinweis:* Beschreiben Sie zunächst alle  $\alpha \in \text{Isom}(\mathbb{R})$  mit  $0^\alpha = 0$ ; überlegen Sie hierzu, welche Werte  $1^\alpha$  für solche  $\alpha$  annehmen kann. Können Sie am Ende eine Matrizen­gruppe angeben, die isomorph zu  $\text{Isom}(\mathbb{R})$  ist?)

(b) Beschreiben Sie die Symmetriegruppe von  $\mathbb{Z}$  als Teilmenge des metrischen Raumes  $X = \mathbb{R}$  bzgl. des gewöhnlichen euklidischen Abstands.

(*Bemerkung:* Diese Gruppe heißt die unendliche Diedergruppe  $D_\infty$ . Wieso?)