

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B Aufgabe 1.1: (2+2+2 Punkte)

Formulieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen gemäß Definition 1.2 als

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k}) = 0, \quad x \in G$$

für geeignete $n, m, l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, ein geeignetes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und eine geeignete Funktion

$$F : G \times (\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^l.$$

(i) $-\Delta u = f$, wobei $u, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$, wobei $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ und $\gamma \geq 1$.

(iii) $\operatorname{div} u = g$, wobei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Handelt es sich jeweils um eine lineare, semilineare, quasilineare oder voll nichtlineare Gleichung?

Hinweis: Für eine Funktion $u : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto u(t, x_1, \dots, x_n)$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir $\Delta u := \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u$. In Teil i) wird die Gleichung ohne Zeitintervall J interpretiert. In Teil ii) hingegen gibt es ein Zeitintervall.

B Aufgabe 1.2: (6 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^2(U)$ und $v \in (C^1(U))^n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$

(ii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(iii) $\nabla \cdot (fv) = f\nabla \cdot v + v \cdot \nabla f$

(iv) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f$

B Aufgabe 1.3: (1+3+2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$u : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 - y^2) \ln \left| \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right|, & (x, y) \in B_1(0) \setminus \{0\} \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass u stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass u stetig partiell differenzierbar ist (d.h. $u \in C^1(B_1(0))$).

(iii) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial_x^2 u$ und $\partial_y^2 u$ auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ existieren und keine stetige Fortsetzung in den Punkt 0 erlauben, wohingegen sich Δu stetig auf ganz $B_1(0)$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 1.4:

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen. Ein Vektorfeld $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird als quellenfrei bezeichnet, falls $\operatorname{div} V = 0$. Die Rotation eines Vektorfelds $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist als

$$\operatorname{rot} V := \nabla \times V = \begin{pmatrix} \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass quellenfreie, hinreichend glatte elektrische/magnetische Felder $E, H : (0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$, die den Maxwell-Gleichungen

$$E_t - \operatorname{rot} H = 0, \quad H_t + \operatorname{rot} E = 0$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ genügen, jeweils eine Wellengleichung erfüllen.