Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 3

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 26.04.2022, Abgabe: Di., 03.05.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 3.1:** (Beschränktheit und gleichmäßige Summierbarkeit in ℓ^1) (9 Punkte)
Eine Teilmenge $K \subseteq \ell^1$ heißt *gleichmäßig summierbar*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $x = (x_1, x_2, \dots) \in K$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x_n| \leqslant \varepsilon$$

gilt.
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $K \subseteq \ell^1$ genau dann präkompakt ist, wenn sie beschränkt und gleichmäßig summierbar ist.

B **Aufgabe 3.2:** (Kompaktheit in c_0) (9 Punkte)
Sei K eine kompakte Teilmenge von c_0. Zeigen Sie, dass es dann $y \in c_0$ gibt, sodass für alle $x \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leqslant y_n.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sup_{x \in K} |x_n|$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *endlich ist und untersuchen Sie die dadurch definierte Folge.*

Aufgabe 3.3: (Supremum der Partialsummen als Norm auf ℓ^1)
Zeigen Sie, dass

$$\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \qquad (x \in \ell^1)$$

eine Norm auf ℓ^1 definiert. Ist $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ein Banachraum?