Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 10

Besprechung der Lösungen: Freitag, den 03.07.2024

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 10.2; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 10.1

Sei $L\,|\,K$ eine Körpererweiterung, und sei $A \le K$ ein Teilring mit $1 \in A$. Ein Element $b \in L$ heißt *ganz* über A, falls b Nullstelle eines normierten Polynoms $f \in A[X] \smallsetminus \{0\}$ ist.

(a) Sei $b \in L$. Zeigen Sie: b ist ganz über A genau dann, wenn $A[b]$ als A-Modul endlich erzeugt ist.

Hinweis. Verwenden Sie aus der linearen Algebra, daß es zu einer quadratischen Matrix $M \in \mathrm{Mat}_k(A[b])$ stets die komplementäre Matrix $\widetilde{M} \in \mathrm{Mat}_k(A[b])$ gibt, für die dann $\widetilde{M}M = \det(M).\mathrm{Id}_k$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Der *ganze Abschluß* von A in L,

$$B = \{b \in L \mid b \text{ ganz über } A\},$$

ist ein Teilring von L.

(c) Ein Integritätsbereich R, mit Quotientenkörper K, heißt *ganzabgeschlossen*, wenn R gleich seinem ganzen Abschluß in K ist. Zeigen Sie: Jeder gaußsche Ring ist ganzabgeschlossen.

Aufgabe 10.2 (2 Punkte)

Sei $L\,|\,K$ eine Körpererweiterung und sei L als K-Algebra endich erzeugt, d. h., es gebe endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in L$ mit $L = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Zeigen Sie: Dann ist L algebraisch über K.

Anleitung. Verwenden Sie Induktion nach n. Für $n \in \{0, 1\}$ ist die Aussage offenbar richtig. Sei nun $n \ge 2$. Widerspruchsannahme: x_n ist nicht algebraisch über K. Schreibe $y = x_n$ und $F = K(y)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $L = F[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ algebraisch über F. Zeigen Sie: Es existiert ein $g \in K[y] \smallsetminus \{0\}$ dergestalt, daß $gx_1, \ldots, gx_{n-1}$ ganz über $K[y]$ sind; vgl. Aufgabe 10.1. Folgern Sie dann: Zu jedem $f \in L = K[y, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $g^m f$ ganz über $K[y]$ ist. Insbesondere gilt dies für alle Elemente $f \in F$. Leiten Sie nun den gesuchten Widerspruch her.

Aufgabe 10.3

Sei $A = K[x_1, \ldots, x_m]$ eine endlich erzeugte Algebra über K, und sei C ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von K.

(a) Begründen Sie: Es gibt wenigstens einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon A \to C$.

Bemerkung. Vergleiche mit dem Artin–Langschen Spezialisierungssatz.

(b) Sei zusätzlich A ein Integritätsbereich, und seien endlich viele Elemente $f_1, \ldots, f_r \in A \smallsetminus \{0\}$ vorgegeben. Gibt es dann stets einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon A \to C$, für den zusätzlich gilt: $f_i\varphi \ne 0$ für $1 \le i \le r$?