Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 9

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 26.06.2024

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 9.1; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 9.1 (2 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(x)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine Anordnung $\leq$ von K, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 < x < 1/n$.

Bemerkung. Also ist x infinitesimal klein; vergleiche Blatt 3.

(b) Der Ordnungskegel in K für die Anordnung $\leq$ aus (a) ist

$$P_{\leq} = \{0\} \cup \{x^m g/h \mid m \in \mathbb{Z},\ g, h \in \mathbb{Q}[x] \text{ mit } g(0)h(0) > 0\}$$

(c) Sei R die reell abgeschlossene Hülle von K bzgl. der Anordnung $\leq$ aus (a). Dann liegt K nicht dicht in R; zum Beispiel existiert kein $a \in K$ mit $\sqrt{x} < a < 2\sqrt{x}$, wobei $\sqrt{x}$, wie üblich, die positive Quadratwurzel von x in R bezeichne.

(d) Sei R wie in (c), und bezeichne ebenfalls mit $\leq$ die (eindeutige) Fortsetzung der Anordnung von K auf R. Sei $f = Y^4 - 5xY^2 + 4x^2 \in K[Y]$. Dann gilt $f(a) \geq 0$ für alle $a \in K$, aber es existiert $b \in R$ mit $f(b) < 0$.

Bemerkung. Im Artinschen Satz (Satz 5.3 der Vorlesung) kann die Bedingung, daß f positiv semidefinit bzgl. Auswertung in R^n ist, i. a. also nicht dahingehend abgeschwächt werden, daß f nur als positiv semidefinit bzgl. Auswertung in K^n vorausgesetzt wird.

Aufgabe 9.2

Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, und sei R eine reell abgeschlossene Hülle für $(K, \leq)$. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $F = K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationale Funktionenkörper in n Variablen.

(a) Sei $f \in F$ mit $f = g/h$ für $g, h \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $h \neq 0$. Zeigen Sie: f ist positiv semidefinit bzgl. Auswertung in R^n, d. h.

$$f(\mathbf{a}) \geq 0 \quad \text{fur alle } \mathbf{a} \in R^n \text{, für die sich } f \text{ überhaupt auswerten läßt,}$$

genau dann, wenn das Polynom gh positiv semidefinit bzgl. Auswertung in R^n ist.

Hinweis. Sind g und h teilerfremd, ist die Behauptung leicht nachzuprüfen. Andernfalls kann man sich mit einer lokalen Analyse wie im Beweis zu Lemma 5.2 der Vorlesung behelfen.

(b) Erläutern Sie: Der Artinsche Satz zur Darstellbarkeit von positiv semidefiniten Funktionen $f \in F$ als Linearkombinationen von Quadraten in F mit positiven Koeffizienten aus K (Satz 5.3 der Vorlesung) folgt bereits aus dem Spezialfall, daß die betrachtete Funktion f ein Polynom ist.