Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 8

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 19.06.2024

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 8.1; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 8.1 (2 Punkte)

Sei $L\,|\,K$ eine Körpererweiterung, mit Zwischenkörper M. Sei B eine Transzendenzbasis für $M\,|\,K$, und $\widetilde{B}$ eine Transzendenzbasis für $L\,|\,M$. Zeigen Sie:

(a) $B \cap \widetilde{B} = \varnothing$.

(b) $B \cup \widetilde{B}$ ist eine Transzendenzbasis für $L\,|\,K$.

Insbesondere liefert dies

$$\mathrm{Trgrad}(L\,|\,K) = \mathrm{Trgrad}(L\,|\,M) + \mathrm{Trgrad}(M\,|\,K).$$

Hinweis. Verwenden Sie, an geeigneter Stelle, Satz 4.4 (1) der Vorlesung.

Aufgabe 8.2

Eine algebraische Körpererweiterung $L\,|\,K$ heißt einfach, mit primitivem Element b, falls $L = K(b)$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Die Erweiterung $L\,|\,K$ ist einfach genau dann, wenn $L\,|\,K$ nur endlich viele Zwischenkörper besitzt.

Hinweis. Ist $L = K(b)$, so betrachten Sie die Minimalpolynome von b über den verschiedenen Zwischenkörpern, um deren Anzahl zu beschränken. Für die Rückrichtung erledigen Sie zunächst den Fall $|K| < \infty$, indem Sie einen geeigneten Struktursatz über endliche Körper einsetzen. Im Fall $|K| = \infty$ ist es hilfreich, die Behauptung auf den Spezialfall $L = K(b_1, b_2)$ zurückzuführen.

(b) Folgern Sie: Jede endliche separable Körpererweiterung ist einfach.

Zusatz. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Geben Sie für den Grundkörper $K = \mathbb{F}_p(X, Y)$ eine Erweiterung L vom Grad $[L : K] = p^2$ an, die *nicht* einfach ist.