Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 7

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 12.06.2024

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 7.1; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 7.1 (2 Punkte)

Sei $K(X)$ der Körper aller rationalen Funktionen in einer Variable X über einem Körper K, und sei $b \in K(X) \smallsetminus K$.

Zeigen Sie: Ist $b = f/g$ mit $f, g \in K[X]$ teilerfremd, so gilt

$$[K(X) : K(b)] = \max\{\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g)\} < \infty.$$

Hinweis. Betrachten Sie das Polynom $f(Y) - bg(Y) \in K(b)[Y]$.

Aufgabe 7.2

Sei $K(X)$ der Körper aller rationalen Funktionen in einer Variable X über einem Körper K, und sei $K \lneqq L \leq K(X)$.

(a) Erläutern Sie: $n = [K(X) : L] < \infty$.

(b) Sei $b_0 + b_1 Y + \ldots + b_{n-1} Y^{n-1} + Y^n \in L[Y]$ das Minimalpolynom von X über L. Bestimmen Sie $h \in K[X]$, so daß das Polynom

$$F = \sum_{i=0}^{n} f_i Y^i := \sum_{i=0}^{n-1} h b_i Y^i + h Y^n \in K[X][Y]$$

primitiv ist, d. h., für $f_0, \ldots, f_n \in K[X]$ gelte $\mathrm{ggT}(f_0, \ldots, f_n) = 1$.

(c) Sei $b = f/g \in L \smallsetminus K$ mit $f, g \in K[X]$ teilerfremd. Zeigen Sie: F teilt $g.f(Y) - f.g(Y)$ in $K[X, Y]$, und darum folgt $\mathrm{grad}_X(F) \leq [K(X) : K(b)]$.

(d) Erklären Sie: Gilt für $b = f/g \in L \smallsetminus K$ mit $f, g \in K[X]$ teilerfremd zusätzlich $\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \leq \mathrm{grad}_X(F)$, so ist $g.f(Y) - f.g(Y) = aF$ für geeignetes $a \in K \smallsetminus \{0\}$.

(e) Zeigen Sie: Es gibt wenigstens ein $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ dergestalt, daß $L = K(b_i)$ gilt. Insbesondere ist L eine rein transzendente Körpererweiterung von K.

Bemerkung. Die Tatsache, daß jeder echte Zwischenkörper L einer rein transzendenten Körpererweiterung $K(X)|K$ vom Transzendenzgrad 1 ebenfalls rein transzendent vom Transzendenzgrad 1 ist, ist als Satz von Lüroth bekannt.