Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 6

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 05.06.2024

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 6.1; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 6.1 (2 Punkte)

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, und sei K ein Teilkörper von R. Zeigen Sie: Der algebraische Abschluß von K in R, d. h.

$$L = \{a \in R \mid a \text{ ist algebraisch über } K\}$$

ist eine reell abgeschlossene Hülle für den formal-reellen Körper K.

Aufgabe 6.2

Sei K ein Zahlkörper, d. h. eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie: Die Anzahl der Anordnungen von K is gleich der Anzahl von *reellen* Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$; insbesondere ist diese Anzahl höchstens gleich $[K : \mathbb{Q}]$.

(b) Finden Sie für $1 \le m \le 5$ konkrete Körper K, die jeweils genau m Anordnungen besitzen.

Aufgabe 6.3

Sei K ein Zahlkörper, d. h. eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, dergestalt, daß K galoissch über $\mathbb{Q}$ ist und ausschließlich *reelle* Einbettungen nach $\mathbb{C}$ besitzt. Sei $b \in K \smallsetminus \{0\}$ totalpositiv, d. h., für jede Anordnung von K gelte $b > 0$.
Zeigen Sie auf elementare Weise (nach C. L. Siegel, siehe Hinweis), daß b sich in K als Summe von Quadraten schreiben läßt.

Hinweis. Ist $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i X^i$, vom Grad n, das Minimalpolynom von b über $\mathbb{Q}$, so gilt:

$$b(a_1 + a_3 b^2 + \ldots) = a_0 + a_2 b^2 + \ldots,$$

wobei die Koeffizienten a_i nicht-negative (warum?) rationale Zahlen sind. Bringen Sie sodann geeignet die Normabbildung von K nach $\mathbb{Q}$ ins Spiel.