

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 5

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 29.05.2024

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 5.1; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/.

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, und $f \in R[X]$. Seien $a, b \in R$ mit $a < b$.

- (a) Beweisen Sie den ‘Zwischenwertsatz’ für Polynomfunktionen auf R :

Gilt $f(a)f(b) < 0$, so gibt es ein $c \in R$ mit $a < c < b$ und $f(c) = 0$.

(*Hinweis.* Verwenden Sie Ergebnisse von den vorherigen Übungsblättern.)

- (b) Wie üblich bezeichne f' die formale Ableitung von f , also $f' = \sum_{k=1}^d k f_k X^{k-1}$ für $f = \sum_{k=0}^d f_k X^k$. Beweisen Sie den ‘Satz von Rolle’ für Polynomfunktionen auf R :

Gilt $f(a) = f(b) = 0$, so gibt es ein $c \in R$ mit $a < c < b$ und $f'(c) = 0$.

(*Hinweis.* Ohne Einschränkung hat f keine Nullstellen in dem offenen Intervall zwischen a und b . Schreibe $f = (X - a)^m (X - b)^n g$ und berechne f' mit Hilfe der Produktregel. Wende dann den Zwischenwertsatz aus (a) geeignet an.)

Aufgabe 5.2

Sei $K = \mathbb{Q}$ und $f = X^3 - 7X - 7$.

- (a) Beweisen Sie elementar (z. B. mit Hilfe des Zwischenwertsatzes): f besitzt drei verschiedene reelle Nullstellen.
- (b) Beweisen Sie dieselbe Aussage über die Berechnung der Signatur $\text{sgn}_{\leq}(A, \beta)$ der zugehörigen Spurform

$$\beta: A \times A \rightarrow K, (x, y) \mapsto \text{Spur}_{A|K}(xy)$$

auf $A = K[X]/fK[X]$ gemäß Satz 3.4 der Vorlesung.