

## Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 4

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 22.05.2024

---

Gepunktet wird den Regeln entsprechend mit Aufgabe 4.2; weitere Informationen auf

[http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper\\_SS24/](http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/).

### Aufgabe 4.1

Zeigen Sie:

- (a) Der formal-reelle Körper  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  besitzt, bis auf  $K$ -Isomorphie, genau zwei verschiedene reell abgeschlossene Hüllen.

(*Hinweis.* Verwenden Sie Ergebnisse von den vorherigen Übungsblättern, nach Möglichkeit aber nicht die bislang unbewiesene Eindeutigkeitsaussage für reell abgeschlossene Hüllen von angeordneten Körpern.)

- (b) Es existiert ein formal-reeller Körper  $K$ , der, bis auf  $K$ -Isomorphie, unendlich viele verschiedene reell abgeschlossene Hüllen besitzt.

### Aufgabe 4.2

(2 Punkte)

Sei  $R$  ein reell abgeschlossener Körper. Zeigen Sie:

- (a) Die normierten irreduziblen Polynome  $f \in R[X]$  mit  $\text{grad}(f) \geq 2$  sind genau die Polynome der Gestalt  $f = X^2 + bX + c$  mit  $b^2 - 4c < 0$  bzgl. der eindeutig bestimmten Anordnung von  $R$ . Für jedes solche Polynom  $f$  gilt:  $\forall a \in R : f(a) > 0$ .
- (b) Beschreiben Sie alle  $f \in R[X]$  mit  $\forall a \in R : f(a) \geq 0$ . Beweisen Sie daraufhin, daß jedes solche Polynom  $f$  eine Summe von Quadraten in  $R[X]$  ist.