

## Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 3

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 15.05.2024

Gepunktet wird mit Aufgabe 3.1; weitere Informationen auf

[http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper\\_SS24/](http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/).

### Aufgabe 3.1

(2 Punkte)

Ein angeordneter Körper  $(K, \leq)$  heißt *schnitt-vollständig*, falls gilt: Sind  $\emptyset \neq A, B \subseteq K$  nicht-leere Teilmengen mit

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b,$$

so existiert wenigstens ein  $c \in K$  mit

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq c \leq b.$$

- (a) Welche der folgenden Körper besitzen eine Anordnung? Welche besitzen eine Anordnung, die zudem schnitt-vollständig ist?

$$\mathbb{Q}(\sqrt{7}), \quad \mathbb{Q}(X) \quad (\text{Körper der rationalen Funktionen über } \mathbb{Q}), \quad \mathbb{R}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Zeigen Sie: Ist ein angeordneter Körper  $(K, \leq)$  schnitt-vollständig, so ist er auch archimedisch.<sup>1</sup>

### Aufgabe 3.2

Der angeordnete Körper  $(R, \leq_R)$  sei schnitt-vollständig. Zeigen Sie:

- (a) Jeder archimedisch angeordnete Körper  $(K, \leq_K)$  läßt sich in  $(R, \leq_R)$  einbetten, d. h., es existiert ein Ringisomorphismus  $\varphi$  von  $K$  auf einen Teilkörper von  $R$  mit

$$\forall a, b \in K : a \leq_K b \leftrightarrow a\varphi \leq_R b\varphi.$$

(*Hinweis.* Verwenden Sie Aufgabe 3.1.)

- (b) Als angeordneter Körper ist  $(R, \leq_R)$  isomorph zu dem Körper der reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ , ausgestattet mit der euklidischen Anordnung.

<sup>1</sup>Der Begriff „archimedisch“ wurde auf Übungsblatt 2 definiert.