

# Algebra – Blatt 2

1	2	3	4	5	Σ

Name und Matr-Nr. .... Abgabe am 25.4.2018 bis 10:30 Uhr  
 Gruppe .....

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

### Aufgabe 1 (5 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie kurz.

- (a) Ist  $G$  eine Gruppe und sind  $N_1, N_2 \triangleleft G$  Normalteiler mit  $N_1 \subset N_2$ , so ist  $G/N_1 \subset G/N_2$ .
- (b) Ist  $G$  eine Gruppe und sind  $N_1, N_2 \triangleleft G$  Normalteiler mit  $N_1 \subset N_2$ , so ist  $G/N_2 \subset G/N_1$ .
- (c) Ist  $G$  eine Gruppe,  $N \triangleleft G$  ein Normalteiler und  $M \in G/N$  eine Nebenklasse, so ist  $1 \in M$ .
- (d) Ist  $G$  eine Gruppe,  $N \triangleleft G$  ein Normalteiler und  $H \subset G/N$  eine Untergruppe, so ist die Vereinigung  $\bigcup_{M \in H} M$  aller Elemente von  $H$  eine Untergruppe von  $G$ .
- (e) Sind  $G$  und  $H$  Gruppen,  $f: G \rightarrow H$  ein Isomorphismus und  $H' \subset H$  eine Untergruppe, so ist  $G' := f^{-1}(H')$  eine Untergruppe von  $G$ , und es gilt  $[G : G'] = [H : H']$ .

### Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe. Zeigen Sie:

- (a) Gilt  $aH = Ha$  für alle  $a \in G$ , so ist  $H$  ein Normalteiler.
- (b) Ist  $[G : H] = 2$ , so ist  $H$  ein Normalteiler.

### Aufgabe 3 (2+1 Punkte):

Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $H, K \triangleleft G$  Normalteiler von  $G$  mit  $K \subset H$ . (Vom vorigen Blatt sollten Sie wissen, dass dann auch  $K$  ein Normalteiler von  $H$  ist.) Zeigen Sie:

- (a) Es gibt einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus  $f: G/K \rightarrow G/H$  mit  $f(aK) = aH$  für  $a \in G$ .
- (b) Zwischen welchen zwei Gruppen erhält man einen Isomorphismus, wenn man den Isomorphiesatz (Satz 1.3.8 aus der Vorlesung) auf  $f$  anwendet?

### Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei  $p$  eine Primzahl. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $\bar{a} \in \mathbb{F}_p^\times$  (hierbei ist  $\mathbb{F}_p$  der Körper mit  $p$  Elementen), so ist  $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$ .  
Hinweis: Wenden Sie einen Satz aus der Vorlesung an.
- (b) Für beliebige  $a \in \mathbb{Z}$  gilt:  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .  
Hinweis: Wenden Sie (a) an.

### Aufgabe 5 (2+2(+2) Punkte):

Es soll ein Rührteig hergestellt werden, der aus gleichen Teilen Eier, Mehl, Zucker und Butter besteht. Außerdem muss noch Backpulver in den Teig; ein Päckchen Backpulver entspricht 500 g Mehl.

Zum Abmessen des Mehls, des Zuckers und der Butter steht nur ein Esslöffel zur Verfügung; es sollen also ganzzahlig viele Esslöffel Zucker, Butter und Mehl verwendet werden. Ein Esslöffel Mehl wiegt 10 g, ein Esslöffel Zucker und Butter je 15 g.

Außerdem sollen am Ende weder angebrochene Eier (ein Ei wiegt 55 g) noch angebrochene Päckchen Backpulver übrig bleiben. Allerdings ist noch ein Eigelb (20 g) und ein halbes Päckchen Backpulver übrig, die mitverwendet werden sollen.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes, dass ein Rührteig erstellt werden kann, der all diese Bedingungen erfüllt.
- (b) Jetzt stellen wir noch die Zusatzbedingung, dass alle, die sich zur Algebra-Vorlesung angemeldet haben, gemeinsam den Kuchen aufessen sollen. Es gab 121 Anmeldungen, und wir nehmen an, dass jeder/jede 600 g Kuchen verdrücken kann. Zeigen Sie, dass auch das möglich ist. (Das Gewicht des Backpulvers darf vernachlässigt werden.)
- \*(c) Bonus-Aufgabe: Bestimmen Sie, wie viel Kuchen man erhält. (Dazu müssen Sie vermutlich erst mal recherchieren, wie man Kongruenzgleichungen explizit lösen kann.)