....
Name

Algebra – Blatt 11

Abgabe am 27.6.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Welche der folgenden Behauptungen gelten für alle Körpererweiterungen L/K und alle Elemente $a \in L$?

(a) Das Element a hat Grad 1 über K genau dann, wenn $a \in K$ ist.

(b) Jedes Element von $K(a)$ lässt sich als K-Linearkombination von Potenzen von a schreiben.

(c) Wenn $\frac{1}{a}$ sich als K-Linearkombination von Potenzen von a schreiben lässt, ist a algebraisch über K.

(d) Ist $a' \in L$ ein weiteres Element, so dass $K(a) = K(a')$ gilt, so haben a und a' das selbe Minimalpolynom über K.

(e) Ist $a' \in L$ ein weiteres Element, so dass a und a' das selbe Minimalpolynom über K haben, so ist schon $a = a'$.

Anmerkung: Mit einer „K-Linearkombination von Potenzen von a“ ist ein Ausdruck der Form $\sum_{i=0}^{n} b_i a^i$ gemeint für $b_i \in K$.

Hinweis: Für einige Teilaufgaben ist Satz 3.2.5 nützlich.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.2.5: $K := \{a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

(b) Wenn man (a) ohne Satz 3.2.5 lösen wollte, müsste man von Hand zeigen, dass die Kehrwerte der Elemente von K wieder in K liegen. Machen Sie dies nur für das Element $1 + \sqrt[3]{2}$ (d. h. drücken Sie $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$ in der Form $a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2$ aus für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$).
Hinweis: Eine möglicher Lösungsweg: Machen Sie aus

$$(a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2(\sqrt[3]{2})^2) \cdot (1 + \sqrt[3]{2}) = 1 + 0 \cdot \sqrt[3]{2} + 0 \cdot (\sqrt[3]{2})^2$$

drei lineare Gleichungen in den Variablen a_0, a_1, a_2 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Wir setzen $\zeta_5 := e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$ (so dass $\zeta_5^5 = 1$ ist) und $f(X) := X^5 - 2$. Zeigen Sie:

(a) f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Die komplexen Nullstellen von f sind $\zeta_5^i\sqrt[5]{2}$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

(c) Im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ hat f genau eine Nullstelle.
Hinweis: $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \subset \mathbb{R}$

(d) Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ und $\mathbb{Q}(\zeta_5\sqrt[5]{2})$ sind zwar isomorph (als Körper) aber nicht gleich (als Teilmengen von $\mathbb{C}$).
Hinweis: Für einen Teil ist Satz 3.2.5 nützlich.

(e) Der Körper $L := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5\sqrt[5]{2})$ enthält alle komplexen Nullstellen von f.
Hinweis: $\zeta_5 \in L$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(b) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ ist.
Hinweis: Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.

(c) Finden Sie das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.
Hinweis: Berechnen Sie Potenzen von α und suchen Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abhängigkeit zwischen diesen Potenzen. (Teil (b) gibt Ihnen eine Obergrenze, bis zu welcher Potenz Sie gehen müssen.)

(d) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.