

Probeklausur Algebra

Ich habe versucht, diese Probeklausur vom Umfang, von der Art und von der Schwierigkeit der Aufgaben ähnlich wie die eigentlichen Klausuren zu machen. Insbesondere werden auch die eigentlichen Klausuren jeweils aus 5 Aufgaben bestehen, die jeweils 6 Punkte geben. Trotzdem kann es natürlich Abweichungen – vor allem in der Schwierigkeit – geben, insbesondere, weil nicht allen Leuten alle Aufgaben gleich schwer fallen.

Die Aufgaben der Probeklausur decken nicht alle Bereiche ab, die in den Klausuren vorkommen können. (Sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.) Klausurrelevant ist der gesamte Vorlesungstoff der Algebra.

Weitere Anmerkungen und Tipps zum Lösen von Aufgaben in den Klausuren:

- **Lesen Sie die Aufgaben sehr sorgfältig.** (Kleine Missverständnisse können leicht zu völlig anderen Lösungen führen, die keine Punkte mehr geben.)
- **Alle Antworten müssen begründet werden** (wenn nicht anders angegeben).
- Bei ja-nein-Fragen sollten Sie *sowohl* „ja“ oder „nein“ *als auch* eine Begründung schreiben. (Nur „ja“ oder „nein“ reicht nicht für die volle Punktzahl, und wenn Sie nur eine Begründung schreiben, aus der nicht klar hervor geht, ob Sie ja oder nein meinen, reicht das auch nicht.)
- Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen alle Resultate aus der Vorlesung und den Übungen verwenden (wenn nicht anders angegeben).
- Manche Begründungen können sehr kurz sein. Bei Rechenaufgaben reicht üblicherweise die Rechnung selbst als Begründung (wenn sie nachvollziehbar ist).
- Um zu begründen, dass etwas *nicht* gilt, ist es am besten, ein (einziges) ganz konkretes Gegenbeispiel anzugeben.
- Wenn Sie die Probeklausur nutzen möchten, um zu testen, ob Sie gut genug für die eigentliche Klausur vorbereitet sind, empfehle ich, dass Sie versuchen, sie zu lösen, ohne sich die Lösungen vorher anzuschauen. (Wenn man die Lösungen gesehen hat, sehen die Aufgaben oft sehr viel einfacher aus, als sie sind.)

Aufgabe 1 (2+1+1+2):

Sei $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^\times$, $n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

- Zeigen Sie, dass f ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ ist.
- Bestimmen Sie den Kern von f .
- Zeigen Sie, dass keine Fortsetzung von f zu einem Gruppenhomomorphismus $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ existiert. (Mit „Fortsetzung“ ist gemeint: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $g(a) = f(a)$.)
Hinweis: Was können Sie über $g(\frac{1}{2})$ sagen?
- Sei nun $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ eine Fortsetzung von f . Zeigen Sie, dass im g nur aus Einheitswurzeln bestehen kann. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass g existiert.)

Aufgabe 2 (1+1+1+1+2):

Wir arbeiten in S_7 . (Zur Erinnerung: Wir schreiben Zykel als $\overline{a_1, \dots, a_k}$.)

- Geben Sie die Ordnung von $\overline{1, 2} \circ \overline{4, 5, 6, 7}$ an.
- Gibt es in S_7 ein Element der Ordnung 8?
- Zeigen Sie, dass die Gruppe $H := \langle \overline{1, 2, 3}, \overline{4, 5, 6} \rangle$ eine Sylow-3-Untergruppe von S_7 ist.
Sie können (ohne es selbst nachzurechnen) verwenden, dass $\#S_7 = 7! = 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ist.
- Sei $\sigma = \overline{3, 4} \circ \overline{6, 7}$. Geben Sie zwei Elemente $\tau_1, \tau_2 \in S_7$ an, so dass $\sigma H \sigma^{-1} = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ ist.
- Zeigen Sie, dass jede Sylow-3-Untergruppe von zwei Dreizykeln erzeugt wird.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+1):

Wir betrachten die Menge $R := \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.
- Sei $\mathfrak{a} = (2) \triangleleft R$ das von 2 erzeugte Ideal. Für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ liegt $a + ib$ in $\mathfrak{a}$?

- (c) Bestimmen Sie die Kardinalität $\#(R/\mathfrak{a})$ und listen Sie alle Elemente von $R/\mathfrak{a}$ auf.
- (d) Zeigen Sie, dass das Element $\overline{1+i} \in R/\mathfrak{a}$ ein Nullteiler ist.
- (e) Folgern Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{b} \triangleleft R$ existiert mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq R$. (Sie brauchen $\mathfrak{b}$ nicht explizit anzugeben.)
- (f) Zeigen Sie: $R/\mathfrak{b} \cong \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1+1):

- (a) Was sind die Grade der Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$?
- (b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{5}$ nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ liegt.
- (c) Was ist der Grad von $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$?
- (d) Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = 6$.
- (e) Sei $b := \sqrt[6]{5}$. Zeigen Sie, dass sich jedes Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5})$ in der Form $a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_5b^5$ schreiben lässt, für rationale Zahlen $a_0, \dots, a_5$.
- (f) Sei L der Zerfällungskörper von $f = (x^2 - 5)(x^3 - 5)$. Bestimmen Sie den Grad von $L/\mathbb{Q}$.
Hinweis: Manche Körper sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, andere nicht.

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1+1):

- (a) Das Polynom $g := x^2 + 4x - 6$ hat zwei reelle Nullstellen: eine positive, die wir mit b_+ bezeichnen und eine negative, die wir mit b_- bezeichnen. Geben Sie ein $c \in \mathbb{Q}$ an, so dass $\mathbb{Q}(b_+) = \mathbb{Q}(b_-) = \mathbb{Q}(\sqrt{c})$ ist.
Hinweis: Berechnen Sie $b_{\pm}$.
- (b) Sei $a_1 := \sqrt{b_+}$. Zeigen Sie, dass $f = x^4 + 4x^2 - 6$ das Minimalpolynom von a_1 über $\mathbb{Q}$ ist.
- (c) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(b_+) \subseteq \mathbb{Q}(a_1)$ ist und berechnen Sie $[\mathbb{Q}(a_1) : \mathbb{Q}(b_+)]$.
- (d) Sei nun $a_2 := -\sqrt{b_+}$ und seien a_3 und a_4 die beiden (komplexen) Quadratwurzeln aus b_- .
Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(a_1) = \mathbb{Q}(a_2) \neq \mathbb{Q}(a_3) = \mathbb{Q}(a_4)$.
- (e) Sei L der Zerfällungskörper von f . Zeigen Sie: $L = \mathbb{Q}(a_1, a_3)$ und bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}(b_+)]$.
- (f) Zeigen Sie, dass $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.
Hinweis: Ist $\text{Aut}(L/\mathbb{Q}(a_1))$ ein Normalteiler von $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$?