Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2026

Algebra
Übungsblatt 8
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Seien $a, b \in R$ assoziiert zueinander und sei $u \in R^\times$ mit $a = ub$. Also $a \in u(b) \subseteq (b)$; das heißt, $(a) \subseteq (b)$. Es gilt $b = u^{-1}a$, also $b \in u^{-1}(a) \subseteq (a)$, also $(b) \subseteq (a)$. Angenommen nun, dass $a, b \in R$ sind sodass $(a) = (b)$. Also $a \in (b) = bR$, das heißt, es existiert $u \in R$ mit $a = bu$. Es gilt auch $b \in (a) = aR$, also existiert $v \in R$ mit $b = av$. Das impliziert $a = bu = avu$, also $a - avu = 0$ oder $a(1 - vu) = 0$. Da R ein Integritätsbereich ist, gilt entweder $a = 0$ oder $1 = vu$. Wenn $a = 0$ ist, dann gilt $(a) = \{0\}$ und $(b) = (a) = \{0\}$, also $b = 0$ und a, b sind assoziiert zueinander. Wenn $1 = vu$ ist, dann sind $v, u \in R^\times$, und aus $a = bu$ foglt, dass a und b assoziiert zueinander sind.

Aufgabe 2.

a) Seien $a \in \mathbb{Z}$, dann es gilt $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$ und $(0, a) \cdot (1, 0) = (0, 0)$; das heißt, jedes Element mit mindestens ein Nullkoordinat ist ein Nullteiler.

   Seien nun $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $c, d \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $(a, b) \cdot (c, d) = (0, 0)$ gdw. $ac = 0$ und $bd = 0$ gdw. $c = 0$ und $d = 0$; das heißt, jedes Element ohne Nullkoordinat ist kein Nullteiler.

b) Sei I ein Ideal von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. agenommen, dass $(1, 0) \notin I$ und $(0, 1) \notin I$. Wir betrachten $R = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/I$ und $a = (1, 0) + I$ und $b = (0, 1) + I$. Dann gilt $a \neq 0$, $b \neq 0$ aber $ab = 0 \in R$; das heißt, R hat Nullteilern und ist daraus kein Körper.

   Also ein maximal Ideal I von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muss entweder $(1, 0)$ oder $(0, 1)$ enthalten. Angenommen, dass $(1, 0) \in I$. Dann gilt $\mathbb{Z} \times \{0\} \subseteq I$ und I ist der Form $\mathbb{Z} \times J$ für einige Ideal $J \subseteq \mathbb{Z}$. Da I maximal ist, muss J auch maximal sein. Also, die maximale Ideal von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind $\mathbb{Z} \times p\mathbb{Z}$ und $p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ für Primzahlen p.

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{C}(x) \setminus \{0\}$. Per Definition von $\mathbb{C}(x)$, existieren $g, h \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ teilerfremd mit $f = \frac{g}{h}$. Seien $a \in \mathbb{C}$ der Hauptkoeffizient von g und $b \in \mathbb{C}$ der Hauptkoeffizient von h, also $g = ag'$ und $h = bh'$ mit g' und h' normiert. Aus dem Haupsatz der Algebra folgt, dass $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene, und $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$ existieren, mit $g' = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{r_i}$ und $h' = \prod_{i=1}^{m}(x - b_i)^{s_i}$. Also gilt $f = \frac{a}{b} \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{r_i} \prod_{i=1}^{m}(x - b_i)^{-s_i}$.

Aufgabe 4. Seien $k, \ell \geqslant 2$. Wenn $k = \ell$ gilt, sind x^k und x^ℓ nich teilerfremd, also muss $k \neq \ell$ gelten. Wir nehmen, dass $k < \ell$ ist.

Die Teilern von x^k sind ± 1, $\pm x^2$,..., $\pm x^{k-2}$, $\pm x^k$. Die Teilern von x^ℓ sind ähnlich. Also, wenn $k \geqslant 4$ sind, ist x^2 ein Teiler von beide x^k und x^ℓ, und sie sind nich teilerfremd. Also,

$k < 4$. Wenn $\ell \geqslant k+2$ ist, ist x^k ein Teiler von x^ℓ, also muss $\ell \leqslant k+1$ sein. Schließlich, da $\ell > k$ ist, gilt $\ell = k+1$.

Die Teilern von x^2 sind ± 1 und $\pm x^2$, die von x^3 sind ± 1 und $\pm x^3$, und die von x^4 sind ± 1, $\pm x^2$ und $\pm x^4$. Das heißt, x^2 und x^3 sind teilerfremd, und x^3 und x^4 auch.

Aufgabe 5.

a) Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ mit grad < 1, dann gilt $f \in \mathbb{C}$ und entweder $f = 0$ oder f ist eine Einheit.

Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ mit grad > 1, dann folgt aus dem Hauptsatz der Algebra, dass f lässt sich als ein Produkt von Polynomen mit grad 1 schreiben, das heißt, f ist reduzibel.

Zuletzt sei $f \in \mathbb{C}$ mit grad 1. Seien $g, h \in \mathbb{C}[x]$ mit $f = gh$. Dann $1 = \deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$, also ein von g und h hat grad 0 und ist ein Einheit.

b) Sei $f = ax + b \in \mathbb{Z}[x]$ reduzibel, also existieren $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ mit $\deg(g) = 0$ und $\deg(h) = 1$ und $f = gh$, und beide g, h nicht Einheit. Da $\deg(g) = 0$ ist, gilt $g \in \mathbb{Z}$, also $f = g(a'x + b')$; das heißt, $a = ga'$ und $b = gb'$, mit $g \neq \pm 1$, also a und b sind nicht teilerfremd.

Seien nun $a, b \in \mathbb{Z}$ nicht teilerfremd. Dann existiert $c \in \mathbb{Z}$, $c \neq \pm 1$, mit $c|a$ und $c|b$. Also $a = ca'$ und $b = cb'$, daraus folgt $f = c(a'x + b')$, und beide c und $a'x + b'$ sind keine Einheit in $\mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 6.

a) Seien $R = \mathbb{Q}[x]$, $S = \mathbb{Z}[x]$, und $a = 2x$. a ist irreduzibel in R aber $a = 2 \cdot x$ und 2, x sind keine Einheit in S.

b) Seien $R = \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Z}$, und $a = 2$. a ist ein Primzahl, also irreduzibel in S; aber a ist eine Einheit in R da R ein Körper ist.

c)

Bsp. 1: Seien $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Z}$ und $a = 2$. Dann ist a irreduzibel in S; aber $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in R$ und $\sqrt{2}$ ist kein Einheit in R: angenommen, dass $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $(a + b\sqrt{2})\sqrt{2} = 1$, dann folgt $a\sqrt{2} + 2b = 1$. Wenn $a \neq 0$, dann gilt $\sqrt{2} = \frac{1-2b}{a} \in \mathbb{Q}$, ein Widerspruch; wenn $a = 0$, dann gilt $2b = 1$, also $b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, auch ein Widerspruch.

Bsp. 2: Seien $R = \mathbb{R}[x]$, $S = \mathbb{R}[x^2] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i} \mid n \in , a_i \in \mathbb{R}\}$, und $a = x^2$. Dann ist a irreduzibel in S; aber $a = x \cdot x$ und x ist kein Einheit in R.