Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2026

Algebra
Übungsblatt 6
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) $\mathfrak{a} = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid a_0 = 0\}$ ist kein Unterring, da $1 \notin \mathfrak{a}$. Ist aber ein Ideal:

- $0 \in \mathfrak{a}$.
- Seien $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ in $\mathfrak{a}$, dann gilt $f + g = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} c_i x^i$ mit $c_i = a_i + b_i$, also $c_0 = a_0 + b_0 = 0$ und $f + g \in \mathfrak{a}$ gilt.
- Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathfrak{a}$. Dann gilt $-f = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$, und $-a_0 = 0$; also gilt $-f \in \mathfrak{a}$.
- Seien $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathfrak{a}$ und $g = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$. Dann gilt $f \cdot g = \sum_{i=0}^{nm} c_i x^i$ mit $c_i = \sum j = 0^i a_j bi - j$, also $c_0 = a_0 b_0 = 0$ und $f \cdot g \in \mathfrak{a}$ gilt.

b) $R = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid a_1 = 0\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Z}[x]$:

- $0 \in R$.
- $1 \in R$.
- Seien $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ in R, dann gilt $f + g = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} c_i x^i$ mit $c_i = a_i + b_i$, also $c_1 = a_1 + b_1 = 0$ und $f + g \in R$ gilt.
- Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R$. Dann gilt $-f = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$, und $-a_1 = 0$; also gilt $-f \in R$.
- Seien $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ in R, dann gilt $f \cdot g = \sum_{i=0}^{nm} c_i x^i$ mit $c_i = \sum j = 0^i a_j bi - j$, also $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 + 0 = 0$ und $f \cdot g \in R$ gilt.

Ist aber nicht ein Ideal, da $1 \in R$ aber $x \cdot 1 = x \notin R$.

c) Kein Unterring, da nicht abgeschlossen unter Multiplikation: x^3 hat Grad $\leqslant 3$, aber $x^3 \cdot x^3 = x^6$ hat Grad > 3.

Auch kein Ideal, da x^3 ist drinn, aber $x \cdot x^3 = x^4$ ist nicht.

Aufgabe 2.

a) Die Abbildung $\varphi\colon R \to R \times R$, $r \mapsto (r, r)$ ist ein Ringhomomorphismus:

- Seien $r, s \in R$. Dann gilt $\varphi(r + s) = (r + s, r + s) = (r, r) + (s, s) = \varphi(r) + \varphi(s)$.
- Seien $r, s \in R$. Dann gilt $\varphi(r \cdot s) = (r \cdot s, r \cdot s) = (r, r) \cdot (s, s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$.
- Es gilt $\varphi(1) = (1, 1)$.

b) Nein, da diese Abbildung schickt 1 nach x.

c) Ja. Man kann die Aufgabe lösen, indem man die Definition von Ringhomomorphismus überprüft. Alternativ kann man sich diese Arbeit sparen, indem man Polynome "an x^2 auswertet". Formal geht dies wie folgt:

- Die Inklusion $\iota\colon R \to R[x]$, $a \mapsto a$ induziert eine Inklusion $\kappa\colon R[y] \to (R[x])[y]$, $\sum_{i=0}^n a_i y^i \mapsto \sum_{i=0}^n \iota(a_i) y^i$, die ein Ringhomomorphismus ist.
- Die Variablenumbennenung $\sigma\colon R[x] \to R[y]$, $\sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i y^i$ ist ein Ringhomomorphismus.
- Die Evaluationsabbildung $\epsilon\colon (R[x])[y] \to R[x]$, $f(y) = \sum_{i=0}^n (g_i(x)) y^i \mapsto f(x^2)$ ist ein Ringhomomorphismus.

Schließlich gilt $\psi\colon R[x] \to R[x]$, $\sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^{2i} = \epsilon \circ \kappa \circ \sigma$, und ψ ist ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 3.

a) Falsch: seien z.B. $R = \mathbb{Z}$, $f = x^2$ und $g = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$, dann g hat Grad 2 aber $g \notin f\mathbb{Z}[x]$.

b) Falsch: seien $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $f = 2x^2 + x$, also $n = 2$. Dann $2f \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$, aber $2f = 4x^2 + 2x = 2x$ hat Grad < 2.

c) Wahr: Sei $m \geqslant n$, dann betrachten wir $g = f \cdot x^{m-n} \in f \cdot R[x]$. Wenn $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_n \neq 0$, dann $g = \sum_{i=0}^n a_i x^{i+m-n} = \sum_{i=m-n}^m a_{i+n-m} x^i$ hat Grad m.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $I \subset K$ ein Ideal. Entweder $I = \{0\}$, oder existiert $x \in I \setminus \{0\}$. Da K ein Körper ist, exitiert $x^{-1} \in K$ mit $x^{-1}x = 1$. Da I ein Ideal ist, gilt $x^{-1}I \subseteq I$; insbesondere, $1 = x^{-1}x \in x^{-1}I \subseteq I$. Sei nun $y \in K$. Es gilt $yI \subseteq I$, insbesondere, $y = y1 \in yI \subseteq I$. Alle Elemente von K sind Elemente von I, das heißt, $K = I$.
Also, entweder $I = \{0\}$ oder $I = K$.

Aufgabe 5.

a) Es gilt per Definition, dass $(R, +)$ eine ablesche Gruppe ist. Wir betrachten nun die Skalarmultiplikation: $K \times R \to R$, $(a, r) \mapsto a \cdot r$, wobei $\cdot$ die Multiplikation in R ist. Seien $a, a' \in K$ und $r, r' \in R$. Es gilt $a \cdot (r + r') = a \cdot r + a \cdot r'$ (Distributivität der Multiplikation in R), $(a + a') \cdot r = a \cdot r + a' \cdot r$ (Distributivität+kommutativität der Multiplikation in R), $a \cdot (a' \cdot r) = (a \cdot a') \cdot r$ (Associativität der Multiplikation in R), und $1 \cdot r = r$ ($1 \in K \subseteq R$ ist das multiplikatives neutrales Element).

b) Es gilt $0 \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ ist abgeschlossen unter $+$, da $\mathfrak{a}$ eine additive Untergruppe von R ist. Sei $\lambda \in K$, dann $\lambda\mathfrak{a} \subseteq a$ gilt; also, $\mathfrak{a}$ ist abgeschlossen unter Skalarmultiplikationm und $\mathfrak{a}$ ein K-Untervektorraum von R ist.

c) Die Familie $B = \left\{x^k(1 + x^2) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$ bildet eine Basis von $\mathfrak{a}$: Sei $f \in \mathfrak{a}$, dann existieren $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit $f = (1 + x^2) \cdot \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i (1 + x^2) \in \langle B \rangle_K$. Seien nun $a_0, \ldots a_n \in K$ mit $\sum_{i=0}^n a_i x^i (1+x^2) = 0$. Dann gilt $0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i (1+x^2) =$

$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n a_i x^{i+2} = a_0 + a_1 x + \sum_{i=2}^n (a_i + a_{i-2}) x^i + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^{n+2}$. Also gilt

$$\begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 & = 0 \\ a_0 + a_2 & = 0 \\ \vdots & \\ a_{n-2} + a_n & = 0 \\ a_{n-1} & = 0 \\ a_n & = 0 \end{cases}$$

Das impliziert, dass $a_i = 0$ für $0 \leqslant i \leqslant n$, also ist B linear unabhängig.

d) Wir behaupten, dass $B' := B \cup \{1, x\}$ eine Basis von R ist. Es gilt $x^0 = 1 \in \langle B' \rangle_K$ und $x^1 \in \langle B' \rangle_K$. Sei $n \geqslant 2$. Per Induktion: angenommen, dass $x^{n-2} \in \langle B' \rangle_K$ gilt. Dann gilt $x^n = x^{n-2}(1 + x^2) - x^{n-2} \in \langle B' \rangle_K$.

Also $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \langle B' \rangle_K$, und da $\langle \{x^k \mid k \in \mathbb{N}\} \rangle_K = K[x]$, es gilt $\langle B' \rangle_K = K[x]$.

Da $x \notin \langle B \rangle_K$, die Menge $B \cup \{x\}$ ist linear unabhängig. Wir zeigen nun, dass $1 \notin \langle B \cup \{x\} \rangle_K$: Seien $a_0, \dots, a_n, b \in K$ sodass $1 = \sum_{i=0}^n a_i x^i (1 + x^2) + bx$. Dann gilt $1 = a_0 + (a_1 + b)x + (a_0 + a_2)x^2 + \cdots + (a_{n-2} + a_n)x^n + a_{n-1}x^{n+1} + a_n x^{n+2}$, also:

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 + b & = 0 \\ a_0 + a_2 & = 0 \\ \vdots & \\ a_{n-2} + a_n & = 0 \\ a_{n-1} & = 0 \\ a_n & = 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat aber keine Lösung.

Aufgabe 6.

a)
- $0 = \frac{0}{2} \in S$.
- $1 = \frac{2}{2} \in S$.
- Sei $x \in S$, also existieren $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{a}{2^n}$. Dann gilt $-x = \frac{-a}{2^n} \in S$.
- Seien $x, y \in S$, also existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{a}{2^n}$ und $y = \frac{b}{2^m}$. Dann gilt $x + y = \frac{2^m a + 2^n b}{2^{n+m}} \in S$.
- Seien $x = \frac{a}{2^n}$ und $y = \frac{b}{2^m}$ in S wie oben. Dann gilt $x \cdot y = \frac{ab}{2^{n+m}} \in S$.

b)
- $\mathfrak{a}$ ist eine additive Untergruppe von S, $\mathbb{Z}$ ist auch eine additive Untergruppe von S; dann muss $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{Z}$ sein.
- Seien $x \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $nx \in \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z} \subseteq S$, ist auch $n \in S$, und da $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S ist, gilt $nx \in \mathfrak{a}$. Also glit $nx \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$; das heißt, $n\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$.

c) Wir zeigen als erstes, dass alle Ideale von $\mathbb{Z}$ der Form $n\mathbb{Z}$ mit $n = 0$ oder n ungerade auch der Form $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$ sind, wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S ist.

Es gilt $0\mathbb{Z} = \{0\} = \{0\} \cap \mathbb{Z}$ und $\{0\}$ ist ein Ideal von S.

Sei nun n ungerade. Dann ist $\mathfrak{a} = nS$ ein Ideal von S. Es gilt $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$: Sei $x \in n\mathbb{Z}$, dann $x = na$ für einige $a \in \mathbb{Z}$, und $x = n\frac{2a}{2} \in \mathfrak{a}$, also $x \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$; sei nun $y \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$, dann $y = n\frac{a}{2^m}$ für einige $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Aber $y \in \mathbb{Z}$, also $2^m | na$. Da n ungerade ist, sind 2^m und n teilerfremd, also $2^m | a$ und $\frac{a}{2^m} \in \mathbb{Z}$; das heißt, $y = n\frac{a}{2^m} \in n\mathbb{Z}$.

Wir zeigen nun, dass alle Ideale von $\mathbb{Z}$ der Form $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$ mit $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S auch der Form $n\mathbb{Z}$ sind, mit $n = 0$ oder n ungerade.

Da $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist (bei b), folgt dass $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, dass $n > 0$ und gerade ist, also $n = 2k$. $n \not| k$, also $k \notin n\mathbb{Z}$. Aber, da $n \in \mathfrak{a}$ liegt, ist $k = \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n \in \frac{1}{2}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, also $k \in \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$; ein Widerspruch.