Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2026

Algebra
Übungsblatt 5
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) G ist abelsch, also ist jede Untergruppe Normal; insbesondere, die 3-Sylow Untergruppe von G ist Normal, und aus Be. 1.8.5 folgt, dass $s_3 = 1$.

b) Sei $H = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \langle \overline{20} \rangle \leqslant G$. Es gilt $\#H = 27$ und $\#G = 9 \cdot 60 = 27 \cdot 20$. Da $27 = 3^3$ und $3 \nmid 20$ gilt, ist H ein Sylow-3-Untergruppe.

Aufgabe 2.

a) Es gilt $\#G = (p-1)p$. Aus der Sylow-Satz, folgt dass $s_p \equiv 1 \mod p$ und $s_p | p-1$, insbesondere ist $s_p < p$, also $s_p = 1$. Aus Bem. 1.8.5 folgt, dass die einzige Sylow-p-Untergruppe ein Normalteiler mit Ordnung p ist.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Es gilt $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $1 \leqslant k < p-1$, also $\operatorname{ord}(A) = p$ und $\langle A \rangle$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von G. Aus (a) folgt, dass $\langle A \rangle$ ein Normalteiler ist.

Aufgabe 3.

a) Es gilt $s_3 \equiv 1 \mod 3$ und $s_3 | 5$, also $s_3 \in \{1, 5\}$. Aber $5 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 3$, also $s_3 = 1$. Sei N die einzige Sylow-3-Untergruppe von G. Aus Bem. 1.8.5 folgt, dass N ein Normlateiler von G ist, und sie hat Ordnung 9.

Es gilt auch $s_5 \equiv 1 \mod 5$ und $s_5 | 9$, also $s_5 \in \{1, 3, 9\}$. Aber $3 \not\equiv 1 \mod 5$ und $9 \equiv 4 \not\equiv 1 \mod 5$, also $s_5 = 1$. Sei N' die einzige Sylow-5-Untergruppe von G. Aus Bem. 1.8.5 folgt, dass N' ein Normlateiler von G ist, und sie hat Ordnung 5.

b) Da N und N' Normalteiler von G sind, sind

$$\pi\colon \begin{array}{ccc} G & \to & G/N \\ a & \mapsto & aN \end{array} \quad \text{und} \quad \pi'\colon \begin{array}{ccc} G & \to & G/N' \\ a & \mapsto & aN' \end{array}$$

Gruppenhomomorphismen. Also

$$\varpi\colon \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G/N \times G/N' \\ (a,b) & \mapsto & (\pi(a), \pi'(b)) \end{array}$$

ist auch ein Gruppenhomomorphismus. Zuletzt ist die Diagonalinjektion

$$\iota\colon \begin{array}{ccc} G & \to & G \times G \\ a & \mapsto & (a,a) \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus, und die Abbildung

$$f\colon \begin{array}{rcl} G & \to & G/N \times G/N' \\ a & \mapsto & (aN, aN') \end{array}$$

ist genau gleich $\varpi \circ \iota$ und ist danach ein Gruppenhomomorphismus.

Sei $a \in \ker f$. Dann ist $aN = N$ und $aN' = M'$. Also sowohl $a \in N$ als auch $a \in N'$. Da $\#N = 9$, gilt $\mathrm{ord}(a)|9$, also $\mathrm{ord}(a) \in \{1, 3, 9\}$. Es gilt auch $\#N' = 5$, also $\mathrm{ord}(a) \in \{1, 5\}$. Daraus folgt $\mathrm{ord}(a) = 1$ und $a = e$; das heißt, $\ker(f)\ \{e\}$.

Also ist f injektiv. Es gilt $\#G = 45$, $\#(G/N) = \frac{\#G}{\#N} = \frac{45}{9} = 5$ und auch $\#(G/N') = \frac{\#G}{\#N'} = \frac{45}{5} = 9$, also $\#(G/N \times G/N') = 5 \cdot 9 = 45$. f ist injektiv zwischen zwei enldiche Menge mit gleich Kardinalität, also ist f auch surjektiv.

Das heißt, f ist ein Isomorphismus.

c) Aus (b) folgt, dass $G \cong G/N \times G/N'$ gilt. G/N hat Ordnung 5, also aus Bem. 1.4.7 folgt, dass $G/N \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist. G/N' hat Ordnung $9 = 3^2$, also aus Blatt 4 Aufg. 3 folgt, dass G/N' ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Schließlich gilt, dass G isomorph zu entweder $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.

a) Es gilt $s_p \equiv 1 \mod p$ und $s_p|2$, also $s_p \in \{1, 2\}$. Aber $2 \not\equiv 1 \mod p$, also $s_p = 1$.

Es gilt auch $s_2|p$, also $s_2 \in \{1, p\}$.

b)
- Sei $H \leqslant \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ein Sylow-2-Untergruppe. Es gilt also $H = \langle a \rangle$ mit $\mathrm{ord}(a) = 2$. Das einziges Element der Ordnung 2 ist $\overline{p} \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, also $H = \left\{\overline{0}, \overline{p}\right\}$ und es existiert nur ein Sylow-2-Untergruppe von $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$: $s_2 = 1$.

  Sei nun $H \leqslant \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ein Sylow-p-Untergruppe. Es gilt also $H = \langle a \rangle$ mit $\mathrm{ord}(a) = p$. $\overline{x} \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ hat Ordnung p gdw. $x \in 2\mathbb{Z}$, also $H = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \dots, \overline{2p-2}\right\}$ und es existiert nur ein Sylow-p-Untergruppe von $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$: $s_p = 1$.

- Seien $\sigma = \overparen{1, 2, \dots, p}$ und $\tau = \overparen{1, p}\overparen{2, p-1}, \dots, \overparen{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}}$ in D_p. Es gilt $D_p = \left\{\sigma^k, \tau\sigma^k \;\middle|\; 0 \leqslant k < p\right\}$. Alle Elemente der Form $\tau\sigma^k$, für $0 \leqslant k < p$, haben Ordnung 2 und sie sind alle verschiedene. Also existieren p viele Sylow-2-Untergruppe von D_p: $\langle \tau \rangle$, $\langle \tau\sigma \rangle$, $\dots$, $\langle \tau\sigma^{p-1} \rangle$. Das heißt, $s_2 = p$.

  Elemente der Form σ^k haben Ordnung p für $0 < k < p$, und es gilt $\sigma^k \in \langle \sigma \rangle$; also existiert nur ein Sylow-p-Untergruppe von D_p: $\langle \sigma \rangle$.

c) Angenommen, dass $s_2 = 1$ und $s_p = 1$. Sei N die einzige Sylow-2-Untergruppe von G, und N' die einzige Sylow-p-Untegruppe von G. N und N' sind Normlateilern von G, und die Abbildung

$$f\colon \begin{array}{rcl} G & \to & G/N \times G/N' \\ a & \mapsto & (aN, aN') \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, der injektiv ist da $\ker(f) = N \cap N' = \{e\}$ und danach surjektiv da $\#G = \#(G/N \times G/N')$.

Also $G \cong G/N \times G/N'$. Aber $\#(G/N) = p$, also $G/N \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\#(G/N') = 2$, also $G/N' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Schließlich gilt $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Das Element $(\overline{1}, \overline{1}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat Ordnung $2p$, also $G \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ist zyklisch.

d) Sei H eine Sylow-2-Untergruppe von G, also $\#H = 2$ und es existiert $a \in G$ mit $H = \langle a \rangle$. Da $\operatorname{ord}(a) = 2$ und $\operatorname{ord}(\sigma^k) | p$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, ist $a \notin \langle \sigma \rangle$.

Sei H' eine andere Sylow-2-Untergruppe von G, also $H' = \langle a' \rangle$. Dann gilt $a \neq a'$ und $a' \notin \langle \sigma \rangle$

Da $s_2 = p$, existieren p viele Sylow-2-Untergruppe von G, also existieren p viele Elemente der Ordnung 2 die nicht in $\langle \sigma \rangle$ liegen. Da $G \setminus \langle \sigma \rangle$ genau p viele Elemente enthält, und p davon haben Ordnung 2, haben alle Elemente in $G \setminus \langle \sigma \rangle$ Ordnung 2.

e) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\tau\sigma^k \notin \langle \sigma \rangle$ – außerdem wird $\ell \in \mathbb{Z}$ existieren mit $\tau\sigma^k = \sigma^\ell$, also $\tau = \sigma^{\ell - k} \in \langle \sigma \rangle$, und das gilt nicht.

Also hat $\tau\sigma^k$ Ordnung 2, das heißt, $\tau\sigma^k\tau\sigma^k = e$, oder $\tau\sigma^k\tau = \sigma^{-k}$. Da $\tau = \tau^{-1}$, gilt $\tau\sigma^k\tau^{-1} = \sigma^{-k}$.

f) Da $\operatorname{ord}(\sigma) = p$, gilt $[G : \langle \sigma \rangle] = 2$, also gilt $G \setminus \langle \sigma \rangle = \tau \langle \sigma \rangle$.

Sei $x \in G$. Entweder $x \in \langle \sigma \rangle$, dann existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = \sigma^k$; oder $x \notin \langle \sigma \rangle$, dann existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = \tau\sigma^k$.

Also x ist der Form σ^k oder $\tau\sigma^k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da σ Ordnung p hat, können wir $k \in \{0, \dots, p-1\}$ nehmen. Da G genau $2p$ Elemente enthält, muss alle Elemente der Form $\tau^j\sigma^k$ mit $j \in \{0, 1\}$ und $k \in \{0, \dots, p-1\}$ verschiedene sein.

Seien $i, j \in \{0, 1\}$ und $k, \ell \in \{0, \dots, p-1\}$, und seien $x = \tau^j\sigma^k$ und $y = \tau^i\sigma^\ell$ in G. Dann gilt $xy = \tau^j\sigma^k\tau^i\sigma^\ell = \tau^j\tau^i(\tau^{-i}\sigma^k\tau^i)\sigma^\ell = \tau^{i+j}\sigma^{(-1)^i k + \ell}$, wobei $i + j$ ist modulo 2 reduziert und $(-1)^i k + \ell$ ist modulo p reduziert.

Seien $\widehat{\sigma} = \overparen{1, 2, \dots, p}$ und $\widehat{\tau} = \overparen{1, p}\,\overparen{2, p-1} \dots \overparen{\tfrac{p-1}{2}, \tfrac{p+1}{2}}$ in D_p. Es gilt $D_p = \langle \widehat{\sigma}, \widehat{\tau} \rangle$. In D_p gilt $\widehat{\tau}^j\widehat{\sigma}^k\widehat{\tau}^i\widehat{\sigma}^\ell = \widehat{\tau}^{i+j}\widehat{\sigma}^{(-1)^i k + \ell}$. Also, der Gruppenhomomorphismus, der schickt (τ, σ) nach $(\widehat{\tau}, \widehat{\sigma})$ ist ein Isomorphismus:

wir betrachten die Abbildung $f \colon G \to D_p$ sodass $f(\tau^j\sigma^k) = \widehat{\tau}^j\widehat{\sigma}^k$. Wir behaupten, dass f ein Gruppenisomorphismus ist.

- Seien $i, j \in \{0, 1\}$ und $k, \ell \in \{0, \dots, p-1\}$, und seien $x = \tau^j\sigma^k$ und $y = \tau^i\sigma^\ell$ in G. Dann gilt $xy = \tau^{i+j}\sigma^{(-1)^i k + \ell}$.
  Es gilt dann $f(xy) = f(\tau^{i+j}\sigma^{(-1)^i k + \ell}) = \widehat{\tau}^{i+j}\widehat{\sigma}^{(-1)^i k + \ell}$, und auch $f(x)f(y) = f(\tau^j\sigma^k)f(\tau^i\sigma^\ell) = \widehat{\tau}^j\widehat{\sigma}^k\widehat{\tau}^i\widehat{\sigma}^\ell = \widehat{\tau}^{i+j}\widehat{\sigma}^{(-1)^i k + \ell}$, also $f(xy) = f(x)f(y)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- Da $D_p = \left\{\widehat{\tau}^j\widehat{\sigma}^k \,\middle|\, j \in \{0, 1\}, k \in \{0, \dots, p-1\}\right\}$ gilt, ist f surjektiv. Da $\#G = \#D_p = 2p$, ist auch f injektiv, und f ist ein Gruppenisomorphismus.