

Algebra
Übungsblatt 4
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Es gilt $\#D_n = 2n$ und $\text{ord}(\sigma) = n$, also $(D_n : \langle \sigma \rangle) = 2$. Aus Blatt 2 Aufgabe 3 folgt, dass $\langle \sigma \rangle$ ein Normalteiler ist.

Es gilt $\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})\tau = \sigma^2\tau \notin \langle \tau \rangle$, also $\sigma\langle \tau \rangle \neq \langle \tau \rangle\sigma$ und $\langle \tau \rangle$ ist kein Normalteiler.

b) Es gilt $\#D_n/\langle \sigma \rangle = 2$ also $D_n/\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist zyklisch.

c) Wir betrachten $D_n \supseteq \langle \sigma \rangle \supseteq \{\text{id}\}$. Es gilt:

- $\langle \sigma \rangle \triangleleft D_n$ (aus (a)) und $D_n/\langle \sigma \rangle$ zyklisch (aus (b)) und danach abelsch,
- $\{\text{id}\} \triangleleft \langle \sigma \rangle$ (trivial) und $\langle \sigma \rangle$ zyklisch (per Definition) und danach abelsch.

Also das ist eine Auflöserung von D_n .

Aufgabe 2.

a) Zu zeigen: $b \in Z(G)$ gdw. $ba_i = a_i b$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

\Rightarrow : Sei $b \in Z(G)$. Dann b kommutiert mit alle $g \in G$. Insbesondere, b kommutiert mit jede a_i .

\Leftarrow : Sei $b \in G$ mit $ba_i = a_i b$ für alle i . Für $k > 1$ gilt auch $ba_i^k = a_i b a_i^{k-1} = \dots = a_i^k b$. Für $k > 0$ gilt $ba_i^k = a_i^k b$, also $b = a_i^k b a_i^{-k}$ und $a_i^{-k} b = b a_i^{-k}$. Das heißt, b kommutiert mit alle elemente der Form a_i^k mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Sei $x \in G$, also existieren $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ und $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ mit $x = a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_m}^{k_m}$. Es gilt:

$$bx = ba_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_m}^{k_m} = a_{i_1}^{k_1} b a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_m}^{k_m} = \dots = a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{i_m}^{k_m} b = xb.$$

b) Es gilt $D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$, und $D_4 = \{\sigma^k, \tau\sigma^k \mid 0 \leq k \leq 3\}$. Wir erinnern von Blatt 3, dass $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$. Sei $k \in \{0, \dots, 3\}$ und $x = \tau\sigma^k \in D_n$. Dann gilt $x\sigma = \tau\sigma^{k+1}$ und $\sigma x = \sigma\tau\sigma^k = \tau\sigma^{-1}\sigma^k = \tau\sigma^{k-1}$. Da $k+1 \not\equiv k-1 \pmod{4}$, gilt $x\sigma \neq \sigma x$, also x und σ kommutieren nicht, d.h., $x \notin Z(G)$, $\sigma \notin Z(G)$. Wird $\sigma^{-1} \in Z(G)$, dann $\sigma \in Z(G)$ auch, da $Z(G)$ eine Gruppe ist; also $\sigma^{-1} \notin Z(G)$ und $Z(G) \subseteq \{\text{id}, \sigma^2\}$. Aus Lem. 1.7.14 folgt, dass $Z(G)$ nicht triviale ist, da D_4 eine 2-Gruppe ist. Daraus folgt $Z(G) = \{\text{id}, \sigma^2\}$.

Aufgabe 3.

- a) Kor. 1.7.15 sagt, dass G abelsch ist.
- b) Sei $a \in G$. Es gilt $\text{ord}(a) \in \{1, p, p^2\}$. $\text{ord}(a) = 1$ gdw. $a = e$, und hier ist $\text{ord}(a) \neq p^2$. Sei also $a \in G \setminus \{e\}$, dann gilt $\text{ord}(a) = p$ und $\langle a \rangle$ ist eine Untergruppe von G der Ordnung p . Da $\#G = p^2$ und $\#\langle a \rangle = p$, gilt $\#(G \setminus \langle a \rangle) = p^2 - p \neq 0$, also existiert $b \in G \setminus \langle a \rangle$. Es gilt $b \neq e$ da $e \in \langle a \rangle$, also $\text{ord}(b) = p$ und $\langle b \rangle \neq \langle a \rangle$, da $b \in \langle b \rangle$ aber $b \notin \langle a \rangle$.
- c) Da H und H' Untergruppe von G sind, ist auch $H \cap H'$ eine Untergruppe von G . Da $H \neq H'$ und $\#H = \#H' = p$, gilt $\#H \cap \#H' < p$. Aber die Ordnung eine Untergruppe von G teil $\#G = p^2$; daraus folgt $\#H \cap H' = 1$ und $H \cap H' = \{e\}$.
- d) Da G abelsch ist, sind H und H' Normalteilern von G . Also sind

$$\pi: \begin{array}{l} G \rightarrow G/H \\ a \mapsto a + H \end{array} \quad \text{und} \quad \pi': \begin{array}{l} G \rightarrow G/H' \\ a \mapsto a + H' \end{array}$$

Gruppenhomomorphismen. Also

$$\varpi: \begin{array}{l} G \times G \rightarrow G/H \times G/H' \\ (a, b) \mapsto (\pi(a), \pi'(b)) \end{array}$$

ist auch ein Gruppenhomomorphismus. Zuletzt ist die Diagonalinjektion

$$\iota: \begin{array}{l} G \rightarrow G \times G \\ a \mapsto (a, a) \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus, und die Abbildung

$$f: \begin{array}{l} G \rightarrow G/H \times G/H' \\ a \mapsto (a + H, a + H') \end{array}$$

ist genau gleich $\varpi \circ \iota$ und ist danach ein Gruppenhomomorphismus.

Sei $a \in \ker f$. Dann ist $a + H = H$ und $a + H' = H'$. Also $a \in H$ und $a \in H'$, das heißt, $a \in H \cap H' = \{e\}$ und $\ker(f) = \{e\}$.

Also ist f injektiv. Es gilt $\#G = p^2$, $\#(G/H) = \frac{\#G}{\#H} = \frac{p^2}{p} = p$ und auch $\#(G/H') = p$, also $\#(G/H \times G/H') = p^2$. f ist injektiv zwischen zwei endliche Menge mit gleich Kardinalität, also ist f auch surjektiv.

Das heißt, f ist ein Isomorphismus.

- e) Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^2$. Entweder existiert $x \in G$ mit $\text{ord}(x) = p^2$, dann ist G zyklisch und $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$; oder existiert kein solche x . Dann existieren $H, H' \leq G$ verschieden Untergruppe von G mit $G \cong G/H \times G/H'$. Aber $\#(G/H) = \#(G/H') = p$; aus Lem. 1.4.7 folgt, dass $G/H \cong G/H' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt. Dann ist $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. Sei $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Es gilt $Z(G) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$.

Seien nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $H = \langle A \rangle \leq G$. H ist abelsch da zyklisch, also $Z(H) = H = \{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

- a) Es gilt $A \in Z(H)$ aber $A \notin Z(G)$, also $Z(H)$ ist keine Untermenge von $Z(G)$.
 b) Es gilt $2I_n \in Z(G)$ aber $2I_n \notin Z(H)$, also $Z(G)$ ist keine Untermenge von $Z(H)$.

Aufgabe 5. Sei $V = \left\{ \text{id}, \widehat{1234}, \widehat{1324}, \widehat{1423} \right\} \triangleleft A_4$. Wir setzen $a = \widehat{1234}$ und betrachten $H = \{\text{id}, a\} = \langle a \rangle$. $\#V = 4 = 2^2$, also aus Kor. 1.7.15 folgt, dass V abelsch ist. Insbesondere ist H ein Normalteiler von A_4 .

Wir betrachten $b = \widehat{123} \in A_4$. Dann gilt $ba = \widehat{123}\widehat{1234} = \widehat{134}$, also haben wir $bH = \{b, ba\} = \left\{ \widehat{123}, \widehat{134} \right\}$.

Es gilt auch $ab = \widehat{1234}\widehat{123} = \widehat{243}$, also $Hb = \{b, ab\} = \left\{ \widehat{123}, \widehat{243} \right\}$. Also $bH \neq Hb$ und $H \not\triangleleft A_4$.