

Algebra
Übungsblatt 3
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Seien $\sigma = \overline{1 \dots n}$ und $\tau = \widehat{12}$ und sei $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Aus Lem. 1.5.6 folgt, dass $\sigma^k \tau \sigma^{-k} = \overline{\sigma^k(1) \sigma^k(2)} = \overline{1+k, 2+k}$. Also sind alle Nachbartranspositionen durch σ und τ erzeugt. Aus Satz 1.5.5 folgt, dass $\langle \sigma, \tau \rangle = S_n$ gilt.

Aufgabe 2.

- a) Nein, da $1 \in \mathbb{R}^\times$ das neutrale Element ist, aber $\lambda_1 \neq \text{id}$: z.B. $\lambda_1(0) = 1 \neq 0$.
- b) Nein, da für $a \in \mathbb{Z}$ beliebig, λ_a ist kein Bijektion.
- c) Ja:
 - Sei $\sigma \in S_4$, dann gilt $\det(A_\sigma) = \text{sgn}(\sigma) = \pm 1 \neq 0$, also $A_\sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und die Abbildung $v \mapsto A_\sigma v$ bijektiv ist.
 - Es gilt $A_{\text{id}} = I_n$.
 - Sei $\sigma \in S_4$. Per Definition, $A_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Daraus folgt $A_\sigma^{-1} e_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$, das heißt, $A_\sigma^{-1} = A_{\sigma^{-1}}$.
 - Seien $\sigma, \tau \in S_4$. Dann gilt $A_\sigma A_\tau e_i = A_\sigma e_{\tau(i)} = e_{\sigma(\tau(i))}$ und $A_{\sigma \circ \tau} e_i = e_{\sigma \circ \tau(i)}$, also gilt $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma \circ \tau}$.

Aufgabe 3.

- a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Dann gilt $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$, also $G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.
- b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Dann gilt $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gdw. $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gdw. $b = 0$, also gilt $\text{Stab}_G \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$.
- c) Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Fixpunkt, also gilt für alle $A \in G$, dass $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Insbesondere gilt $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, und daraus folgt $x = 0$. Es gilt auch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$, also $y = 0$ und der einzige Fixpunkt ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- d) Es gilt $G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$. Dann gilt $G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$. Sei zuletzt $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Dann gilt $G \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$.

Aufgabe 4.

a) Es gilt $\tau\sigma\tau^{-1} = \overbrace{\tau(1)\tau(2)\dots\tau(n)} = \overbrace{n, n-1, \dots, 1} = \sigma^{-1} = \sigma^{n-1}$.

b) Sei $G = \{\sigma^k, \tau\sigma^k \mid k = 0, \dots, n-1\}$. Dann liegen $\sigma, \tau \in G$. Es gilt auch $G \subseteq D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$. Wir zeigen nun, dass G eine Untergruppe von D_n ist.

• $\text{id} = \sigma^0 \in G$.

• Sei $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt $\sigma^k = \sigma^{k-n} = \sigma^{k+n}$, also es existiert $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\sigma^k = \sigma^\ell$. Das heißt, $\{\sigma^k, \tau\sigma^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = G$.

• Seien $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\sigma^k \circ \sigma^\ell = \sigma^{k+\ell} \in G$, $\tau\sigma^k \circ \sigma^\ell = \tau\sigma^{k+\ell} \in G$.

Wir haben $\tau^2 = \text{id}$, also $\tau^{-1} = \tau$. Das bedeutet, dass $\tau\sigma^k \circ \tau\sigma^\ell = (\tau\sigma^k\tau^{-1})\sigma^\ell = (\tau\sigma\tau^{-1})^k\sigma^\ell = \sigma^{-k}\sigma^\ell = \sigma^{k-\ell} \in G$ und $\sigma^k \circ \tau\sigma^\ell = \tau^{-1}(\tau\sigma^k\tau\sigma^\ell) = \tau^{-1}(\sigma^{k-\ell}) = \tau\sigma^{k-\ell} \in G$.

Also, G ist abgeschlossen unter Verknüpfung.

• Es gilt $(\sigma^k)^{-1} = \sigma^{-k} \in G$, und $(\tau\sigma^k)^{-1} = \sigma^{-k}\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau\sigma^{-k}\tau^{-1} = \tau^{-1}(\tau\sigma\tau^{-1})^{-k} = \tau^{-1}\sigma^k = \tau\sigma^k$.

Also, G ist abgeschlossen unter Inversen. Das heißt, G ist eine Untergruppe von D_n .

Da $G \leq D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$ und $\sigma, \tau \in G$ gilt, haben wir $G = D_n$. G enthält genau $2n$ Elemente: Elemente der Form σ^k haben Ordnung n , Elemente der Form $\tau\sigma^k$ haben Ordnung 2, also, die sind verschiedene. Seien nun $k, \ell \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\sigma^k = \sigma^\ell$, dann ist $\sigma^k(1) = k = \sigma^\ell(1) = \ell$, also $k = \ell$. Schließlich, wenn $\tau\sigma^k = \tau\sigma^\ell$, gilt auch $\sigma^k = \sigma^\ell$ und $k = \ell$.

c) Es gilt $\sigma^k(1) = k$, also die Bahn $D_n 1$ enthält alle Elemente und hat Kardinalität n .

d) Die Bahnformel gibt $\#D_n x = (D_n : \text{Stab}_{D_n}(x))$, also $\# \text{Stab}_{D_n}(x) = \frac{\#D_n}{\#D_n x}$. Hier gilt $\#D_n x = n$, also $\# \text{Stab}_{D_n}(x) = \frac{2n}{n} = 2$. Elemente der Form $\tau\sigma^k$ haben Ordnung 2, und es gilt $\tau\sigma^k(x) = \tau(x+k) = n-x-k$ (mit $+$ und $-$ modulo n berechnet), und es gilt $\tau\sigma^k(x) = x$ gdw. $k = -2x \pmod n$. Also $\text{Stab}_G(x) = \langle \tau\sigma^{-2x} \rangle = \{\text{id}, \tau\sigma^{-2x}\}$.

Aufgabe 5.

a) Sei $x \in X$. Es gilt $\# \text{Stab}_G(x)\#Gx = \#G = 21$, also $\#Gx$ teilt 21: $\#Gx \in \{1, 3, 7, 21\}$.

b) Sei n_i die Anzahl von Bahnen der Lang i . Dann gilt $\#X = 11 = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}$. $n_{21} = 0$ da $11 < 21$. Angenommen, dass $n_1 = 0$; dann $11 = 3n_3 + 7n_7$. Diese Gleichung hat keine Lösung in \mathbb{N} , also ist $n_1 > 0$: es existiert mindestens eine Bahn mit Lang 1, das heißt, es existiert $x \in X$ mit $Gx = \{x\}$.

c) Seien n_i wie oben. Es gilt $\#X = 13 = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}$. Hier ist $n_1 = n_{21} = 0$, also $13 = 3n_3 + 7n_7$. Diese Gleichung hat nun 1 Lösung, nämlich, $n_3 = 2$ und $n_7 = 1$: $13 = 3 + 3 + 7$.