Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2026

Algebra
Übungsblatt 2
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Es gilt $f(a)^n = f(a^n) = f(e_G) = e_H$. Aus Bem. 1.4.4 folgt, dass $\operatorname{ord}(f(a))|n$ gilt.

b) Seien $n = \operatorname{ord}(a)$ und $m = \operatorname{ord}(f(a))$. Aus (a) folgt, dass $m|n$ gilt. Wir betrachten nun das Homomorphismus $f^{-1}\colon H \to G$. Aus (a) folgt, dass $\operatorname{ord}(f^{-1}(b))|\operatorname{ord}(b)$ für alle $b \in H$; insbesondere, $\operatorname{ord}(f^{-1}(f(a)))|\operatorname{ord}(f(a))$, das heißt, $n|m$, also $n = m$.

Alternativ Lösung, die nur Injektivität braucht: Sei f injektiv. Seien $n = \operatorname{ord}(a)$ und $m = \operatorname{ord}(f(a))$. Aus (a) folgt, dass $m|n$. Per Definition von Ordnung gilt $f(a)^m = e_H$, also $f(a^m) = e_H$. Da f Injektiv ist, gilt $a^m = e_G$; also $m|n$ und $m = n$.

c) Das Element $\overline{1} \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ hat offensichtlich Ordnung 9. Sei nun $(a, b) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dann gilt $3(a, b) = (3a, 3b) = (0, 0)$, also $\operatorname{ord}((a, b)) \leqslant 3$. Insbesondere gibt es kein Element in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit gleiche Ordnung als $\overline{1} \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, aus (b) folgt, dass $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

d) Es gilt:

$$2(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{2}), \quad 3(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{0}), \quad 4(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{1}), \quad 5(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{2}), \quad 6(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0}).$$

Also hat $(\overline{1}, \overline{1})$ Ordnung 6 und es erzeugt die ganze $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Aus Satz 1.4.2 folgt, dass $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

e) Wir vermuten, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau dann zyklish ist, wenn n und m teilerfremd sind.

Wir behaupten, dass $(\overline{1}, \overline{1}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ Ordnung $\operatorname{kgV}(n, m)$ hat. In der Tat, sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0})$; also gilt $k \equiv 0 \mod n$ und $k \equiv 0 \mod m$. Das heißt, k ist sowohl Vielfaches von n als auch von m. Die Ordnung von $(\overline{1}, \overline{1})$ ist dann das kleinstes gemeinsames Vielfaches von n und m.

Es gilt $\#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = nm$.

Angenommen, dass n und m teilerfremd sind. Dann gilt $\operatorname{kgV}(n, m) = nm$, also $\big\langle(\overline{1}, \overline{1})\big\rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Wir nehmen nun, dass n und m nicht teilerfremd sind. Dann gilt $\operatorname{kgV}(n, m) < nm$. Seien $(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $k = \operatorname{kgV}(n, m)$, dann gilt $k(a, b) = (0, 0)$; also $\# \langle(a, b)\rangle \leqslant k < \#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.

a) Es gilt $\overline{\frac{2}{3}} \neq \overline{0}$, $2\overline{\frac{2}{3}} = \overline{\frac{4}{3}} \neq \overline{0}$, und $3\overline{\frac{2}{3}} = \overline{2} = \overline{0}$, also $\operatorname{ord}(\overline{\frac{2}{3}}) = 3$.

b) Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, und a, b teilerfremd. Wenn $\overline{\frac{a}{b}}$ Ordnung 4 hat, dann gilt $4\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Also b teilt $4a$; da a und b teilerfremd sing, gilt $b|4$.

   Wenn $b = 1$, dann hat $\frac{a}{b}$ Ordnung 1; wenn $b = 2$, dann hat $\frac{a}{b}$ Ordnung $\leqslant 2$. Also muss $b = 4$ sein. Die Menge von Elemente in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit Ordnung 4 ist $\left\{\overline{\frac{1}{4}}, \overline{\frac{3}{4}}\right\}$.

c) Sei $x \in G$. Per Definition existieren $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, sodass $x = \overline{\frac{a}{b}}$. Dann gilt $bx = \overline{a} = \overline{0}$, also $ord(x) \leqslant b$.

Aufgabe 3.

a) Angenommen, dass $aH = Ha$ für alle $a \in G$. Seien $g \in G$ und $h \in H$. Dann ist $gh \in gH$. Da $gH = Hg$ gilt, ist $gh \in Hg$, also existiert $h' \in H$ mit $gh = h'g$. Daraus folgt $ghg^{-1} = h' \in H$, das heißt, H ist ein Normalteiler.

b) Angenommen, dass $(G : H) = 2$ gilt. Also gibt es genau zwei Linksnebenklassen von H. Es gilt $H = eH$, also H ist eine Linksnebenklasse. Da die Nebenklassen ein Partition von G bilden, gilt $G = H \sqcup (G \setminus H)$, also für alle $a \in G$ gilt entweder $aH = H$ oder $aH = G \setminus H$.

   Aus Lem. 1.3.3 (b) folgt, dass $aH = H$ gilt gdw. $a \in H$ liegt.

   Seien $g \in G$ und $h \in H$. Wenn $g \in H$ liegt, dann liegt $ghg^{-1} \in H$. Wir nehmen an, dass $g \in G \setminus H$ liegt. Also gilt $gH \neq H$, und $gH = G \setminus H$ da $(G : H) = 2$.

   Wenn $ghg^{-1} \in G \setminus H$ liegt, da $gH = G \setminus H$, gilt $ghg^{-1} \in gH$. Also existiert $h' \in H$ mit $ghg^{-1} = gh'$. Daraus folgt $hg^{-1} = h'$ und $g^{-1} = h'h^{-1} \in H$. Also $g \in H$, ein Widerspruch.

   Alternativ Lösung: Da $(G : H) = 2$, gibt es zwei Linksnebenklassen, also für alle $a \in G$ gilt entweder $aH = H$ oder $aH = G \setminus H$.

   Da $(G : H) = 2$, gibt es auch zwei Rechtsnebenklassen,* also für alle $a \in G$ gilt entweder $Ha = H$ oder $Ha = G \setminus H$.

   Es gilt auch $aH = H$ gdw. $a \in H$ gdw. $Ha = H$.

   Seien $g \in G$. Entweder $g \in H$, dann $gH = H = Hg$, oder $g \notin H$, dann $gH = G \setminus H = Hg$.

   Also ist H ein Normalteiler von G.

Aufgabe 4. Sei $f\colon G \to H$ beliebig.

Der Homomorphiesatz sagt, dass $G/\ker(f) \simeq \operatorname{im}(f)$ gilt; insbesondere gilt $\#\operatorname{im}(f) = \#(G/\ker(f)) = (G : \ker(f))$.

Da $\ker(f) \leqslant G$, sagt der Satz von Lagrange, dass $\#G = (G : \ker(f))\#\ker(f)$, und $(G : \ker(f))|\#G$.

Da $\operatorname{im}(f) \leqslant H$, sagt der Satz von Lagrange, dass $\#H = (H : \operatorname{im}(f))\#\operatorname{im}(f)$, und $\#\operatorname{im}(f)|\#H$.

*Das war nicht in Vorlesung gezeigt aber folgt aus Lem. 1.3.3. Zu zeigen genau: die Abbildung $G/H \to H\backslash G$, $aH \mapsto Ha^{-1}$ wohldefiniert und bijektiv ist.

Also $\#\operatorname{im}(f)$ teilt sowohl $\#G$ als auch $\#H$; die sind aber teilerfremd, also muss $\#\operatorname{im}(f) = 1$ sein. Da $e = f(e)$, gilt $e \in \operatorname{im}(f)$; also $\operatorname{im}(f) = \{e\}$ und f muss trivial sein.

Aufgabe 5.

a) $\sigma = \overparen{128}\,\overparen{3756}$.

b) $\sigma = \overparen{12}\,\overparen{28}\,\overparen{37}\,\overparen{75}\,\overparen{56}$. Da σ ein Produkt von 5 Transpositionnen ist, gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ und $\sigma \notin A_8$.

c) Wir zeigen per Induktion für $k \geqslant 2$, dass $\operatorname{sgn}(\overparen{x_1 \dots x_k}) = (-1)^{k-1}$ gilt.

   Wenn $k = 2$, dann ist $\overparen{x_1 x_2}$ eine Transposition, und $\operatorname{sgn}(\overparen{x_1 x_2}) = -1$ per Definition.

   Angenommen, dass $\operatorname{sgn}(\overparen{x_1 \dots x_k}) = (-1)^{k-1}$ für alle $x_1, \dots, x_k$. Dann gilt $\operatorname{sgn}(\overparen{x_1 \dots x_{k+1}}) = \operatorname{sgn}(\overparen{x_1 \dots x_k}\,\overparen{x_k x_{k+1}}) = \operatorname{sgn}(\overparen{x_1 \dots x_k}) \operatorname{sgn}(\overparen{x_k x_{k+1}}) = (-1)^{k-1}(-1) = (-1)^k$.

   Also $\operatorname{sgn}(\overparen{x_1 \dots x_k}) = 1$ gdw. k ungerade ist.