

Algebra
Übungsblatt 13
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- a) Seien L, K Körper sodass L/K ist eine Galois Körpererweiterung von Grad n . Sei p prim sodass $p|n$, und seien $\ell, m \in \mathbb{N}$ mit $n = mp^\ell$ mit m, p teilerfremd. Dann existiert mindestens ein Körper K' sodass $K \subseteq K' \subseteq L$, und L/K' ist eine Galois Körpererweiterung von Grad p^ℓ . Sei s_p die Anzahl solche Körpererweiterungen. Dann $s_p \equiv 1 \pmod{p}$ und $s_p|m$.
- b) Seien L, K Körper sodass L/K ist eine Galois Körpererweiterung von Grad n . Sei p prim sodass $p|n$. Dann existiert ein Körper K' , sodass $K \subseteq K' \subseteq L$, und L/K' ist eine Galois Körpererweiterung von Grad p .

Aufgabe 2.

- a) $\alpha^2 = \zeta_8^2 + 2\zeta_8^8 + \zeta_8^{14} = \zeta_4 + 2 + \zeta_4^3 = i + 2 - i = 2$. Also $\alpha = \sqrt{2}$ und das Minimalpolynom von α ist $x^2 - 2$.
- b) Es gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$, also ist $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ echt. Es gilt $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ und $\zeta_8 \notin \mathbb{R}$, aber $\zeta_8 \in L$. Daraus folgt, dass $L/\mathbb{Q}(\alpha)$ echt ist.
Es gilt $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2[L : \mathbb{Q}(\alpha)] \geq 4$. Aber $L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ und $\zeta_8^4 + 1 = 0$, also $[L : \mathbb{Q}] \leq 4$. Schließlich gilt $[L : \mathbb{Q}] = 4$.
- c) Da L ein Zerfallungskörper ist, ist $L/\mathbb{Q}$ Galois. Also ist $\# \text{Aut}(L/\mathbb{Q}) = [L : \mathbb{Q}] = 4$. Das Minimalpolynom von ζ_8 ist $x^4 + 1$, und die Nullstellen davon sind $\zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^5, \zeta_8^7$, die alle in L liegen. Also existiert für jede $k \in \{1, 3, 5, 7\}$ ein $\sigma_k \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ mit $\sigma_k(\zeta_8) = \zeta_8^k$.
- d) Es gilt $\sigma_3(\sigma_3(\zeta_8)) = \sigma_3(\zeta_8^3) = \sigma_3(\zeta_8)^3 = (\zeta_8^3)^3 = \zeta_8^9 = \zeta_8$, also $\sigma_3 \circ \sigma_3 = \sigma_1 = \text{id}$.
- e) $\sigma_5(\sigma_5(\zeta_8)) = \zeta_8^{25} = \zeta_8$, und $\sigma_7(\sigma_7(\zeta_8)) = \zeta_8^{49} = \zeta_8$, also gilt $\sigma_5 \circ \sigma_5 = \sigma_1$ und $\sigma_7 \circ \sigma_7 = \sigma_1$.
- f) Aus Blatt 4 Auf. 3 folgt, dass eine Gruppe der Ordnung 4 Isomorph entweder zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Da $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ kein Element der Ordnung 4 hat, gilt $\text{Aut}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- g) Es gilt $\sigma_3(\beta) = \zeta_8^3 + \zeta_8 = \beta$, also $\beta \in \text{Fix}(H)$.
- h) Da $\beta \in \text{Fix}(H)$, gilt $\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \text{Fix}(H)$. Es gilt $\beta^2 = \zeta_8^2 + \zeta_8^6 + 2\zeta_8^4 = i - i - 2 = -2$, also $\beta = \sqrt{2}i \notin \mathbb{Q}$. Daraus folgt $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2$ und $2 = [\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}] = [\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2[\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}(\beta)]$, also $[\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}(\beta)] = 1$ und $[\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}(\beta)] = 1$ und $[\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}(\beta)] = 1$ und $[\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}(\beta)] = 1$.
- i) Es gilt $\sigma_7(\alpha) = \alpha$, also $\alpha \in \text{Fix}(\langle \sigma_7 \rangle)$ und $\mathbb{Q}(\alpha) = \text{Fix}(\langle \sigma_7 \rangle)$.
- j) Es gilt $\gamma = 0$.
- k) Es gilt $\gamma = \zeta_8 \zeta_8^5 = \zeta_8^6 \notin \mathbb{Q}$, es gilt auch $\sigma_5(\gamma) = \zeta_8^{30} = \zeta_8^6 = \gamma$, also $\mathbb{Q}(\gamma) = \text{Fix}(\langle \sigma_5 \rangle)$.

Aufgabe 3.

- a) Wir möchten benutzen, dass der Bahn von $\sqrt[5]{2}$ unter dieser Wirkung alle Elemente in X enthält, also für jede $k \in \{0, \dots, 4\}$ existiert $\sigma_k \in \text{Aut}(L/K)$ mit $\sigma_k(\sqrt[5]{2}) = \zeta_5^k \sqrt[5]{2}$. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$. Es gilt $\text{MiPo}_{\sqrt[5]{2}/\mathbb{Q}} = x^5 - 2$. Sei $k \in \{0, \dots, 4\}$. Dann $\zeta_5^k \sqrt[5]{2}$ ist auch eine Nullstelle von $\text{MiPo}_{\sqrt[5]{2}/\mathbb{Q}} = x^5 - 2$. Aus Lem. 3.3.10 folgt, dass ein Homomorphismus σ von $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ nach $\mathbb{Q}^{alg}$ über $\mathbb{Q}$ existiert, mit $\sigma(\sqrt[5]{2}) = \zeta_5^k \sqrt[5]{2}$. Aus Lem. 3.3.9 folgt, dass $\hat{\sigma} \in \text{Aut}(\mathbb{Q}^{alg}/\mathbb{Q})$ existiert, mit $\hat{\sigma}|_{\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})} = \sigma$. Schließlich, L ist der Zerfallungskörper von $x^5 - 2$, also ist $L/\mathbb{Q}$ normal. Aus Bem. 3.4.5 folgt, dass $\hat{\sigma}|_L \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ gilt. Also wir setzen $\sigma_k = \hat{\sigma}|_L$, und es gilt $\sigma_k \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ und $\sigma_k(\sqrt[5]{2}) = \zeta_5^k \sqrt[5]{2}$.
- b) Wir betrachten die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$. Aus Blat 11 Auf. 5 folgt, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5 \sqrt[5]{2})$ und dass $\text{MiPo}_{\zeta_5 \sqrt[5]{2}/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})}$ grad 4 hat. Seine Nullstelle sind genau $\zeta_5^k \sqrt[5]{2}$ für $k \in \{1, \dots, 4\}$. Sei $k \in \{1, \dots, 4\}$. Aus Lem. 3.3.10 folgt, dass ein Homomorphismus σ von L nach $\mathbb{Q}^{alg}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ existiert, mit $\sigma(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = \zeta_5^k \sqrt[5]{2}$. Aus Lem. 3.3.9 folgt, dass $\hat{\sigma} \in \text{Aut}(\mathbb{Q}^{alg}/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}))$ existiert, mit $\hat{\sigma}|_L = \sigma$. Schließlich, L ist der Zerfallungskörper von $\text{MiPo}_{\zeta_5 \sqrt[5]{2}/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})}$, also ist $L/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ normal. Aus Bem. 3.4.5 folgt, dass $\hat{\sigma}|_L \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}))$ gilt. Also gilt $\sigma \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}))$ und $\sigma(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = \zeta_5^k \sqrt[5]{2}$.
- c) Aus a) folgt, dass $\sigma_1 \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ existiert, mit $\sigma_1(\sqrt[5]{2}) = a$. Da σ_1 bijektiv ist, existiert $x \in L$ mit $\sigma_1(x) = b$. Da $b^5 = 2$, gilt auch $x^5 = 2$, also $x \in X$; da $\sigma_1(x) = b \neq a = \sigma_1(\sqrt[5]{2})$, gilt $x \neq \sqrt[5]{2}$. Also $x \in X'$. Aus b) existiert $\sigma_2 \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ mit $\sigma_2(\sqrt[5]{2}) = \sqrt[5]{2}$ und $\sigma_2(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = x$. Sei $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Dann gilt $\sigma(\sqrt[5]{2}) = \sigma_1(\sigma_2(\sqrt[5]{2})) = \sigma_1(\sqrt[5]{2}) = a$ und $\sigma(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = \sigma_1(\sigma_2(\zeta_5 \sqrt[5]{2})) = \sigma_1(x) = a$.
- d) Es gilt $[L : \mathbb{Q}] = 20$, und, da $L/\mathbb{Q}$ Galois ist, $\# \text{Aut}(L/\mathbb{Q}) = 20$. Es existiert $5 \cdot 4 = 20$ viele tuple $(a, b) \in X^2$ mit $a \neq b$. Also ist σ eindeutig.
- e) Es gilt $\sigma_0(\zeta_5) = \sigma_0(\frac{\zeta_5 \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}}) = \frac{\sigma_0(\zeta_5 \sqrt[5]{2})}{\sigma_0(\sqrt[5]{2})} = \frac{\zeta_5^2 \sqrt[5]{2}}{\zeta_5 \sqrt[5]{2}} = \zeta_5^{-1}$. Also gilt für jede $k \in \{0, \dots, 4\}$, dass $\sigma_0(\zeta_5^k \sqrt[5]{2}) = \sigma_0(\zeta_5^k) \sigma_0(\sqrt[5]{2}) = \zeta_5^{k-1} \zeta_5 \sqrt[5]{2} = \zeta_5^{k+2} \sqrt[5]{2}$. Daraus folgt $\sigma_0 = \overline{02413}$, wobei $k \in \{0, \dots, 4\}$ ist zu $\zeta_5^k \sqrt[5]{2} \in X$ assoziiert.
- f) Es gilt $\text{ord}(\sigma_0) = 5$, also $[L : \text{Fix}(\sigma_0)] = 5$ und $[\text{Fix}(\sigma_0) : \mathbb{Q}] = 4$.