

Algebra
Übungsblatt 12
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Sei $b \in L \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist $L = \mathbb{Q}(b)$ (das folgt aus Übungsblatt 11, Auf. 1). Sei f das Minimalpolynom von b über $\mathbb{Q}$. Dann existieren $c, d \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^2 + cx + d$. Aus der Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen folgt, dass $b = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d}}{2}$. Sei $a = c^2 - 4d \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $b = -\frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a}$, also $b \in \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Dann folgt $\mathbb{Q}(b) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Aber

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}] \leq 2$$

und

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}(b)][\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 2[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}(b)]$$

Daraus folgt $[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}(b)] = 1$, das heißt, $\mathbb{Q}(b) = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.

Aufgabe 2. Sei $a' \in K(a)$ eine Nullstelle des Minimalpolynoms von a über K . Wir werden zeigen, dass es genau ein Automorphismus von $K(a)$ über K existiert, die a nach a' schickt. Aus 3.3.10 folgt, dass ein Homomorphismus $\sigma: K(a) \rightarrow K^{alg}$ über K existiert, der schickt a nach a' . Sei $x \in K(a)$, dann ist $x = \sum_{i=0}^{d-1} c_i a^i$, mit $c_i \in K$ und $d = [K(a) : K]$. Da $a' \in K(a)$ liegt, gilt $\sigma(x) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \sigma(a)^i = \sum_{i=0}^{d-1} c_i a'^i \in K(a') \subseteq K(a)$, also $\text{im}(\sigma) \subseteq K(a)$. Wir sehen σ als ein Endomorphismus von $K(a)$ über K . Da σ injektiv ist (aus 3.1.11), und da σ insbesondere ein K -lineare Abbildung von $K(a)$ nach $K(a)$, und da $\dim_K(K(a)) < \infty$, ist auch σ surjektiv, und $\sigma \in \text{Aut}(K(a)/K)$.

Also für jede $a' \in K(a)$, der eine Nullstelle von f ist, existiert $\sigma \in \text{Aut}(K(a)/K)$ mit $\sigma(a) = a'$.

Seien nun $\sigma, \tau \in \text{Aut}(K(a)/K)$ mit $\sigma(a) = \tau(a) = a'$. Wir sehen σ und τ als Abbildungen von $K(a)$ nach K^{alg} . Da $\sigma(a) = \tau(a)$, folgt aus 3.3.10, dass $\sigma = \tau$ gilt. Also existiert genau ein $\sigma \in \text{Aut}(K(a)/K)$ mit $\sigma(a) = a'$.

Aufgabe 3.

- a) Das Minimalpolynom von $\sqrt[5]{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist $x^5 - 2$. Aus auf. 2 folgt, dass $\# \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q})$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $x^5 - 2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ ist. Es gibt nur eine Nullstelle von $x^5 - 2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$, also $\# \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}) = 1$
- b) Nein, da $\# \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}) = 1$, gilt $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}) = \{\text{id}\}$; und $\text{id}(\sqrt[5]{2}) \neq \sqrt[5]{2^2}$.
- c) Das Minimalpolynom von ζ_5 über $\mathbb{Q}$ ist $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Die Nullstelle davon sind $\zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3$ und ζ_5^4 , die liegen alle in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$. Daraus folgt, dass $\# \text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}) = 4$ ist.
- d) Ja, da ζ_5^2 eine Nullstelle des Minimalpolynoms von ζ_5 über $\mathbb{Q}$ ist, die liegt in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$. Dann gilt $\sigma_2(\zeta_5^2) = \zeta_5^4$.
- e) Aus Blatt 11 Auf. 5 folgt, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5)$ und $[L : \mathbb{Q}] = 20$ ist.

- f) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$. Dann gilt $[L : K] = 4$ (aus Blatt 11 Auf. 5), und $L = K(\zeta_5 \sqrt[5]{2})$. Das Minimalpolynom von $\zeta_5 \sqrt[5]{2}$ über K hat grad 4, und seine Nullstellen sind genau $\zeta_5 \sqrt[5]{2}, \zeta_5^2 \sqrt[5]{2}, \zeta_5^3 \sqrt[5]{2}, \zeta_5^4 \sqrt[5]{2}$, die alle in L liegen. Also gilt $\# \text{Aut}(L/K) = 4$.

Aufgabe 4.

- a) Sei $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann existieren $b, c \in \mathbb{Q}$ mit $a = b + c\sqrt{2}$. Angenommen, dass $a^2 = b^2 + 2c^2 + 2bc\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ liegt. Dann muss $2bc = 0$ sein, also, entweder $b = 0$ oder $c = 0$. Wenn $b = 0$ ist, gilt $a = c\sqrt{2}$, und $a^2 = 2c^2 \in \mathbb{Q}$. Wenn $c = 0$ ist, gilt $a = b$, und $a^2 = b^2 \in \mathbb{Q}$.
- b) Angenommen, dass $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist. Dann ist $3 = \sqrt{3}^2$, also $\sqrt{3}$ ist entweder der Form $b \in \mathbb{Q}$ oder $c\sqrt{2}$ mit $c \in \mathbb{Q}$. Da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, haben wir $\sqrt{3} = c\sqrt{2}$. Da $c \in \mathbb{Q}$ ist, gilt $c = \frac{n}{m}$ mit n, m teilerfremd. Dann gilt $m\sqrt{3} = n\sqrt{2}$, also $3m^2 = 2n^2$. Daraus folgt $2|m^2$, also $m = 2m'$, und $3 \cdot 4m'^2 = 2n^2$, der impliziert $3 \cdot 2m'^2 = n^2$. Also 2 teilt n^2 , und $n = 2n'$; also sind n, m nicht teilerfremd.

Sei $f(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$. Da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gilt, hat f keine Nullstelle in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und, da $\deg(f) = 2$, ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Also ist f das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

- c) Da $x^2 - 3$ das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist, gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$. Dann gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$.
- d) Sei $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Aus Bem. 3.2.2 (mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $a = \sqrt{3}$) folgt, dass $x = a + b\sqrt{3}$, mit $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Aus Bem. 3.2.2 (mit $K = \mathbb{Q}$ und $a = \sqrt{2}$) folgt, dass $a = c + d\sqrt{2}$ und $b = e + f\sqrt{2}$, mit $c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Dann folgt $x = (c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})\sqrt{3} = c + d\sqrt{2} + e\sqrt{3} + f\sqrt{6}$. Das heißt, $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ erzeugt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ als ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Da $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) = 4$, ist $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

- e) Da $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist, haben wir der Folgende Turm von Körpererweiterungen: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Also $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ teilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$, und das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ hat grad entweder 1, 2, oder 4.

Es gilt $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, also $\sqrt{3} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, und der grad des Minimalpolynoms von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist größer als 1.

Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, sodass $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Also gilt $a(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + b(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + c = 2a + 3a + 2a\sqrt{6} + b\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c = (2a + 3a + c) + b\sqrt{2} + b\sqrt{3} + 2a\sqrt{6} = 0$. Da $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, gilt $2a + 3a + c = 0$, $b = 0$, und $2a = 0$; also $a = 0$, $c = 0$ und $f = 0$.

Also das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ hat grad > 2 , und daraus folgt, dass es grad 4 hat.

- f) Es gilt

$$\begin{aligned} 4 &= [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] \\ &= [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] \\ &= [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] \cdot 4 \end{aligned}$$

also $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] = 1$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

- g) Wir betrachten $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Diese Körpererweiterung ist durch $\sqrt{3}$ erzeugt, und $x^2 - 3$ ist sein Minimalpolynom. Die Nullstellen von $x^2 - 3$ sind $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$, die beide in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ liegen. Also existiert $\sigma_{1,-1} \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$, mit $\sigma_{1,-1}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. Da $\sigma_{1,-1}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ festlässt, lässt er auch $\mathbb{Q}$ fest, und es gilt $\sigma_{1,-1} \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ mit $\sigma_{1,-1}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ und $\sigma_{1,-1}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

Ähnlich betrachten wir $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und finden wir $\sigma_{-1,1} \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ mit $\sigma_{-1,1}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ und $\sigma_{-1,1}(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

Schließlich setzen wir $\sigma_{-1,-1} = \sigma_{-1,1} \circ \sigma_{1,-1}$.

- h) Für jeder $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ ist $\sigma(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ eine Nullstelle des Minimalpolynoms von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Also sind $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sigma_{-1,1}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sigma_{1,-1}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, und $\sigma_{-1,-1}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$ vier Nullstellen des Minimalpolynoms von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Da dieses Polynom grad 4 hat, sind sie alle Nullstellen.

Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ enthält alle Nullstellen des Minimalpolynoms von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, also ist er der Zerfällungskörper von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.