

Algebra
Übungsblatt 11
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Sei $a \in L$, dann sind $K \subseteq K(a) \subseteq L$ Körper. Aus Satz 3.1.6 folgt, dass $[L : K] = [L : K(a)][K(a) : K]$. Da $[L : K] = p$ prim ist, gilt entweder $[L : K(a)] = 1$ und $[K(a) : K] = p$, oder $[L : K(a)] = p$ und $[K(a) : K] = 1$. Wenn $[K(a) : K] = 1$, dann gilt $K(a) = K$ und $a \in K$; wenn $[K(a) : K] = p$, dann gilt $a \notin K$ und $[L : K(a)] = 1$, also $L = K(a)$.

Aufgabe 2. Da $z \notin \mathbb{Q}$ ist, gilt $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] > 1$, und der Grad des Minimalpolynoms von z ist mindestens 2. Es gilt $z^2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$, also gilt $z^2 - 2z + 2 = 2i - 2(1+i) + 2 = 0$, und das Minimalpolynom von z ist $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Aufgabe 3. Wir betrachten ein regelmäßiges p -Eck mit Ecken $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$, und wir nehmen an, dass alle a_k konstruierbar mit Zirkel und Lineal sind. Der Umkreis des Dreiecks $a_1 a_2 a_3$ ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal, also ist das Zentrum c meines p -Ecks konstruierbar. Seien $a'_k = a_k - c$, dann bilden $a'_1, \dots, a'_p \in \mathbb{C}$ ein regelmäßiges p -Eck mit Zentrum 0, und alle a'_k sind konstruierbar. Der Winkel $\widehat{a'_1 0 a'_2}$ ist $\frac{2\pi}{p}$, also gilt $\frac{a_2}{a_1} = e^{\frac{2\pi i}{p}} = \zeta_p$. Da a_1 und a_2 konstruierbar sind, ist auch ζ_p konstruierbar. Wir betrachten $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}]$. Aus Bsp. 3.2.9 folgt, dass $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$, was keine Potenz von 2 ist. Aus Kor. 3.2.11 folgt, dass ζ_p nicht konstruierbar ist. Also ist das regelmäßige p -Eck nicht konstruierbar wenn $p - 1$ keine Potenz von 2 ist.

Aufgabe 4.

- a) Es gilt $\sqrt{2} = -1 \cdot (-\sqrt{2})$, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. Daraus folgt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. Es gilt auch $-\sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(-\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- b) Sei $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Es gilt $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$, f ist normiert, und irreduzibel; also f ist das Minimalpolynom von $\sqrt{2}$ sowohl wie $-\sqrt{2}$.
- c) Sei $g = g_2 \circ g_1^{-1} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. Da $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$ gilt, ist g ein Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Es gilt $g(\sqrt{2}) = g_2(g_1^{-1}(\sqrt{2}))$. Da $g_1(\bar{x}) = \sqrt{2}$, haben wir $g_1^{-1}(\sqrt{2}) = \bar{x}$. Da $g_2(\bar{x}) = -\sqrt{2}$, gilt $g(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$; also $g \neq \text{id}$.
- d) Sei $h \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \setminus \{\text{id}\}$. Aus Lem. 3.1.13 folgt, dass $h = \text{id}$ gdw. $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Hier gilt also $h(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2}$. Da h ein Ringhomomorphismus ist, gilt $h(\sqrt{2})^2 = h(\sqrt{2}^2) = h(2) = 2$, also $h(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Hier gilt also $h(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Dann folgt aus Lem. 3.1.13, dass $h = g$.

Aufgabe 5.

- a) Es gilt $\alpha_i^5 = (\zeta_5^i \sqrt[5]{2})^5 = \zeta_5^{5i} \sqrt[5]{2}^5 = 1^i 2 = 2$, also α_i ist eine Nullstelle von f . Seien nun $0 \leq i < j \leq 4$, dann gilt $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = \zeta_5^{j-i} \neq 1$ da $0 < j - i < 5$ gilt. Das heißt, alle α_i sind paarweise verschieden, und $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ sind 5 verschiedenen Nullstellen von f . Da $\deg(f) = 5$, gibt es nicht mehr Nullstellen.
- b) Aus der Eisenstein Kriterium: es gilt $2 \nmid a_5 = 1$, $2 \mid a_i = 0$ für $0 < i < 5$, und $2 \mid a_0 = 2$ aber $2^2 = 4 \nmid a_0$.
- c) Da $f(\sqrt[5]{2}) = 0$ und f irreduzibel und normiert ist, ist f das Minimalpolynom von $\sqrt[5]{2}$. Daraus folgt, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}] = 5$, und $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) = \left\{ \sum_{i=0}^4 a_i \sqrt[5]{2}^i \mid a_i \in \mathbb{Q} \right\}$.
- d) Da $\sqrt[5]{2} \in \mathbb{R}$ ist, gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \subseteq \mathbb{R}$. Sei nun $i > 0$, dann gilt $\alpha_i = \zeta_5^i \sqrt[5]{2} \notin \mathbb{R}$, also insbesondere $\alpha_i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.
- e) Dieses Argument zeigt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ isomorph zu $\mathbb{Q}(\zeta_5 \sqrt[5]{2})$ ist; dieser Isomorphismus ist aber nicht eine Gleichheit von Mengen.
- f) f ist irreduzibel auf $\mathbb{Q}$ aus b), aber f ist nicht irreduzibel auf K , da $\alpha_0 \in K$ ist, und $f(\alpha_0) = 0$. Also, f ist nicht das Minimalpolynom von α_1 .
- g) Es gilt $f = x^5 - 2 = (x - \sqrt[5]{2})(x^4 + \sqrt[5]{2}x^3 + \sqrt[5]{2}^2x^2 + \sqrt[5]{2}^3x + \sqrt[5]{2}^4)$, also nehmen wir $g = (x^4 + \sqrt[5]{2}x^3 + \sqrt[5]{2}^2x^2 + \sqrt[5]{2}^3x + \sqrt[5]{2}^4) \in K[x]$.
- h) $g \in K[x]$ ist ein normiertes polynom mit $g(\alpha_1) = 0$. Also, das Minimalpolynom von α_1 auf K teilt g . Aber g hat keine Nullstelle in K , dann kann g kein Faktor der Grad 1 oder 3 besitzen. Das heißt, das Minimalpolynom von α_1 auf K hat grad entweder 4 oder 2.
- i) Es gilt $\zeta_5 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, also $\zeta_5 \in L = \mathbb{Q}(\alpha_0, \alpha_1)$. Daraus folgt $\alpha_2 = \zeta_5 \alpha_1 \in L$, $\alpha_3 = \zeta_5 \alpha_2 \in L$, und $\alpha_4 = \zeta_5 \alpha_3 \in L$.
- j) Sei $d = [L : K] = [K(\alpha_1) : K]$, also bei g), d ist entweder 2 oder 4. Es gilt $[L : \mathbb{Q}] = [L : K][K : \mathbb{Q}] = 5d$.

Da $\zeta_5 \in L$ ist, gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_5) \subseteq L$. Es folgt aus Bsp. 3.2.9, dass $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = 4$. Sei $e = [L : \mathbb{Q}(\zeta_5)]$. Dann gilt $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\zeta_5)][\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = 4e$.

Also gilt $4e = 5d$; da 4 und 5 teilerfremd sind, gilt $4 \mid d$, also $d \neq 2$, $d = 4$, und $[L : \mathbb{Q}] = 5d = 20$.