

**Algebra**  
**Übungsblatt 1**  
**Lösungsvorschlag**

**Aufgabe 1.**

- a)  $H$  ist keine Untergruppe von  $G$ , da  $0 \notin H$ .  
b)  $H$  ist keine Untergruppe von  $G$ , da  $\frac{1}{2} \in H$  liegt, aber  $2 = (\frac{1}{2})^{-1} \notin H$ .  
c)  $H$  ist eine Untergruppe von  $G$ :

- Sei  $e \in G$  das neutrales Element, dann  $ea = ae = a$ , also  $e \in H$ .
- Sei  $x \in H$ , dann gilt:

$x^{-1}a$	$= (x^{-1}a)e$	Def. von neutrales Element
	$= (x^{-1}a)(xx^{-1})$	Def. von inverses Element
	$= (x^{-1}(ax))x^{-1}$	Assoziativität
	$= (x^{-1}(xa))x^{-1}$	$x \in H$
	$= ((x^{-1}x)a)x^{-1}$	Assoziativität
	$= (ea)x^{-1}$	Def. von inverses Element
	$= ax^{-1}$	Def. von neutrales Element

Das heißt,  $x^{-1} \in H$ , und  $H$  ist abgeschlossen unter Inversen.

- Seien  $x, y \in H$ , dann gilt  $(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = x(ay)$ . Das heißt,  $xy \in H$  und  $H$  ist abgeschlossen unter Verknüpfung.

**Aufgabe 2.** Wir zeigen, dass  $H = \langle \frac{1}{6} \rangle$  gilt.

Es gilt  $\frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ , also  $\frac{1}{6} \in H$  ist. Da  $H$  eine Gruppe ist, gilt  $\langle \frac{1}{6} \rangle \subseteq H$ .

Es gilt auch  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \in \langle \frac{1}{6} \rangle$  und  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \in \langle \frac{1}{6} \rangle$ , also  $H \subseteq \langle \frac{1}{6} \rangle$ .

**Aufgabe 3.**

- a) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ .  $f$  ist kein Homomorphismus, da  $f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4$ , aber  $f(1) + f(1) = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4$ .
- b) Sei  $g: \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$ ,  $x \mapsto x^2$ .  $g$  ist ein Homomorphismus:
- $g(1) = 1^2 = 1$ .
  - Sei  $x \in \mathbb{R}^\times$ . Dann gilt  $g(x^{-1}) = (x^{-1})^2 = (x^2)^{-1} = g(x)^{-1}$ .
  - Seien  $x, y \in \mathbb{R}^\times$ . Dann gilt  $g(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = g(x)g(y)$ .

- c) Sei  $h: \text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}), A \mapsto A^2$ .  $h$  ist kein Homomorphismus: seien  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , es gilt  $A, B \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ .  $A$  und  $B$  kommutieren nicht, also  $AB \neq BA$ . Da  $A$  und  $B$  invertierbar sind, gilt auch  $AAB \neq ABA$  und  $AABB \neq ABAB$ , d.h.,  $h(A)h(B) \neq h(AB)$ .

#### Aufgabe 4.

- a) Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . Es gilt  $a^2(n) = a(a(n)) = a(-n) = -(-n) = n$ , d.h.,  $a^2 = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ . Daraus folgt  $a^m = \text{id}_{\mathbb{Z}}$  wenn  $m \in \mathbb{Z}$  gerade ist und  $a^m = a$  wenn  $m \in \mathbb{Z}$  ungerade ist. Schließlich gilt  $\langle a \rangle = \{a^m | m \in \mathbb{Z}\} = \{\text{id}_{\mathbb{Z}}, a\}$  (siehe Bsp. 1.1.17).

Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . Es gilt  $b^2(n) = b(b(n)) = 1 - b(n) = 1 - (1 - n) = n$ , also  $b^2 = \text{id}_{\mathbb{Z}}$  und nochmal  $\langle b \rangle = \{\text{id}_{\mathbb{Z}}, b\}$ .

- b) Wir betrachten  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \langle c \rangle, m \mapsto c^m$ . Wir behaupten, dass  $f$  ein Isomorphismus ist.\*

- Es gilt  $f(0) = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ .
- Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $f(-m) = c^{-m} = (c^m)^{-1} = f(m)^{-1}$ .
- Seien  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $f(n+m) = c^{n+m} = c^n c^m = f(n)f(m)$ .

Also  $f$  ist ein Homomorphismus. Wir zeigen nun, dass  $f$  bijektiv ist.

Aus Bsp. 1.1.17 folgt, dass  $\langle c \rangle = \{c^m | m \in \mathbb{Z}\}$ , d.h.,  $f$  ist surjektiv.

Seien schließlich  $n, m \in \mathbb{Z}$  mit  $f(n) = f(m)$ . D.h.,  $c^n = c^m$ . Insbesondere gilt  $c^n(0) = c^m(0)$ . Es gilt  $c^n(0) = n$  und  $c^m(0) = m$ , d.h.,  $n = m$ , und  $f$  ist injektiv.

- c) Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . Es gilt  $(b \circ a)(n) = b(a(n)) = 1 - a(n) = 1 + n = c(n)$ , d.h.,  $b \circ a = c$  und  $c \in \langle a, b \rangle$  gilt.

Per definition ist  $\langle c \rangle$  die kleinste Untegruppe die  $c$  enthält. Da  $\langle a, b \rangle$  auch eine Untegruppe die  $c$  enthält ist, muss sie größer als  $\langle c \rangle$  sein; d.h.,  $\langle c \rangle \leq \langle a, b \rangle$  gilt.

#### Aufgabe 5.

- a) Sei  $f: G \rightarrow H$  ein *surjektiver* Homomorphismus und sei  $N \triangleleft G$  ein Normalteiler.

Seien  $a \in f(N)$  und  $b \in H$ .

Da  $a \in f(N)$  liegt, existiert  $x \in N$  mit  $f(x) = a$ .

Da  $b \in H$  liegt und  $f$  surjektiv ist, existiert  $y \in G$  mit  $f(y) = b$ . Da  $N$  normal in  $G$  ist und  $x \in N$  liegt, gilt  $yx y^{-1} \in N$ .

Schließlich gilt:  $bab^{-1} = f(y)f(x)(f(y))^{-1} = f(yx y^{-1}) \in f(N)$ , also  $f(N)$  ist ein Normalteiler von  $H$ .

---

\*Bsp. 1.2.4 sagt, dass  $f$  ein Homomorphismus ist. Hier machen wir das Beweis nochmal.

b) Sei  $H = S_3$ ,  $h = (12) \in H$ , und  $G = \langle (12) \rangle$ . Sei  $f: G \rightarrow H$  die Inklusion, also  $f: g \in G \mapsto g \in H$ .  $f$  ist ein Homomorphismus,  $f$  ist nicht surjektiv.

Wir setzen  $N = G$ , also  $N$  ist ein Normalteiler von  $G$ . Aber  $f(N) = G$  ist nicht normal in  $H$ :  $(12) \in G$  aber  $(23)(12)(23) = (13) \notin G$ .

### Aufgabe 6.

- a)
- $\text{id} \in H$  da  $\text{id}(1) = 1$ .
  - Sei  $\sigma \in H$ , also  $\sigma(1) = 1$ . Dann gilt  $\sigma^{-1}(1) = \sigma^{-1}(\sigma(1)) = \text{id}(1) = 1$ , also  $\sigma^{-1} \in H$ .
  - Seien  $\sigma, \tau \in H$ , also  $\sigma(1) = 1$  und  $\tau(1) = 1$ . Dann gilt  $(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(1) = 1$ , d.h.,  $\sigma\tau \in H$ .

b) Wir zeigen  $\tau H = \{x \in S_4 \mid x(1) = 2\}$ :

Sei  $x \in \tau H$ , dann existiert  $\sigma \in H$  mit  $x = \tau\sigma$ . Da  $\sigma \in H$ , gilt  $\sigma(1) = 1$ , und  $x(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(1) = 2$ .

Sei nun  $x \in S_4$  mit  $x(1) = 2$ . Dann  $x = \tau(\tau^{-1}x)$  und  $(\tau^{-1}x)(1) = \tau^{-1}(2) = 1$ , also  $\tau^{-1}x \in H$  und  $x \in \tau H$ .

Wir zeigen ähnlich, dass  $H\tau = \{x \in S_4 \mid x(4) = 1\}$ .

c) Nein: es gilt  $\tau H \neq H\tau$ , also  $\tau H\tau^{-1} \neq H$ . Z.B. gilt  $(34) \in H$  und  $\tau(34)\tau^{-1} = (1234)(34)(4321) = (14) \notin H$ .