

Aufgaben der zweiten Klausur Algebra

Aufgabe 1 (1+1+1+1+2):

Wir arbeiten in der Gruppe $\mathbb{Q}$ (mit $+$ als Verknüpfung).

- (a) Zeigen Sie, dass $H_1 := \{\frac{r}{6} \mid r \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist.
- (b) Sei nun $H_2 := \langle \frac{5}{6} \rangle \subseteq \mathbb{Q}$. Gilt $H_1 \subseteq H_2$? Gilt $H_2 \subseteq H_1$?
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \rangle$ ist.
- (d) Zeigen Sie: Sind $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Q}$, so gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ so, dass $\langle r_1, \dots, r_k \rangle \subseteq \langle \frac{1}{n} \rangle$ ist.
- (e) Zeigen Sie, dass $\langle \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \rangle$ zyklisch ist und geben Sie einen Erzeuger an.

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1+1):

Wir arbeiten in der symmetrischen Gruppe S_7 . (Zur Erinnerung: Wir schreiben Zykel als $\overline{a_1, \dots, a_k}$.) Sei $\sigma_1 := \overline{1, 2, 3}$, $\sigma_2 := \overline{3, 4} \circ \overline{5, 6}$ und $G := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subseteq S_7$.

- (a) Schreiben Sie $\sigma_1 \circ \sigma_2$ in Zykelschreibweise.
- (b) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe der alternierenden Gruppe A_7 ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\langle \sigma_1 \rangle$ kein Normalteiler von G ist.
- (d) Bestimmen Sie die Bahn von 2 unter der Wirkung von G auf $\{1, \dots, 7\}$.
- (e) Geben Sie ein Element $a \in \{1, \dots, 7\}$ an mit $\text{Stab}_G(a) = G$.
- (f) Geben Sie ein Element von $\text{Stab}_G(5)$ an, das nicht in $\langle \sigma_1 \rangle$ liegt.

Aufgabe 3 (2+1+1+2):

Wir arbeiten im Ring $\mathbb{Q}[x, y]$ und betrachten darin die Ideale $\mathfrak{a}_1 = (x, y)$, $\mathfrak{a}_2 = (xy)$ und $\mathfrak{a}_3 = (x)$.

- (a) Welche der Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ sind in welchen anderen dieser Ideale enthalten? Geben Sie für jede echte Inklusion ein Element an, dass im größeren aber nicht im kleineren Ideal liegt. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.
- (b) Geben Sie zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]/\mathfrak{a}_2$ an die beide nicht 0 sind, aber mit $ab = 0$.
- (c) Zeigen Sie: Jeder Ringhomomorphismus von $\mathbb{Q}[x, y]/\mathfrak{a}_2$ nach $\mathbb{Q}[y]$, der $\bar{y}$ auf y abbildet, bildet $\bar{x}$ auf 0 ab.
- (d) Zeigen Sie: Jedes Element von $\mathbb{Q}[x, y]/\mathfrak{a}_2$ lässt sich in der Form $\bar{f} + \bar{g}$ schreiben, mit $f \in \mathbb{Q}[x]$ und $g \in \mathbb{Q}[y]$.
Hinweis: Was können Sie über Elemente der Form $\overline{ax^ky^\ell} \in \mathbb{Q}[x, y]/\mathfrak{a}_2$ sagen, für $k, \ell \geq 1$?

Aufgabe 4 (1+1+1+1+2):

Sei $f := x^5 + 6x^2 + 9x + 12$ und sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f .

- (a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}(a)$ liegt.
- (c) Bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(a, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.
- (d) Was ist das maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass $1, a, a^2, \dots, a^k$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind?
- (e) Zeigen Sie, dass für das gleiche k auch gilt: $1, a, a^2, \dots, a^k, \sqrt{2}, a\sqrt{2}, \dots, a^k\sqrt{2}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5 (1+1+1+1+2):

Sei $p \geq 3$ prim und sei $f = 1 + x^p + \dots + x^{p(p-1)}$. In dieser Aufgabe dürfen Sie verwenden, dass f irreduzibel ist (das wurde in einer Übungsaufgabe gezeigt) und dass $f \cdot (x^p - 1) = x^{p^2} - 1$ ist.

- (a) Begründen Sie, dass f das Minimalpolynom von ζ_{p^2} ist.
Zur Erinnerung: $\zeta_{p^2} = e^{2\pi i/p^2}$ ist eine primitive p^2 -te Einheitswurzel.

- (b) Zeigen Sie, dass $L := \mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$ bereits der Zerfällungskörper von f ist.
- (c) Für welche $r \in \{0, \dots, p^2 - 1\}$ existiert ein $\sigma \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$, so dass $\sigma(\zeta_{p^2}) = \zeta_{p^2}^r$ gilt?
- (d) Geben Sie ein $a \in L$ an, so dass für den Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(a)$ von $L/\mathbb{Q}$ gilt: $[K : \mathbb{Q}] = p - 1$.
- (e) Zeigen Sie, dass kein weiterer Zwischenkörper K' von $L/\mathbb{Q}$ mit $[K' : \mathbb{Q}] = p - 1$ existiert.
Hinweis: Sie können z. B. die Sylow-Sätze auf die Galois-Gruppe $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ anwenden.