

Aufgaben der ersten Klausur Algebra

Aufgabe 1 (1+1+1+1+2):

- (a) Welche Ordnungen können die Elemente einer Gruppe der Ordnung 12 haben?
- (b) Zeigen Sie, dass alle Ordnungen aus (a) in der Gruppe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ auftauchen, indem Sie explizite Beispiel-Elemente angeben, die diese Ordnungen haben.
- (c) Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe der Ordnung 2 und G' eine Gruppe der Ordnung 6, so gilt für alle $a \in G \times G'$: $a^6 = 1$.
- (d) Geben Sie ein Element der Ordnung 6 von $S_2 \times S_3$ an.
- (e) Zeigen Sie, dass in alternierenden Gruppe A_4 Elemente der Ordnungen 1, 2 und 3 existieren und dass keine weiteren Ordnungen auftreten.
Hinweis: Betrachten Sie alle möglichen Zykelzerlegungen.

Aufgabe 2 (1+1+1+1+2):

Sei G eine Gruppe der Ordnung 1815, und sei $P_{11} \leq G$ eine Sylow-11-Untergruppe. (Anmerkung: $1815 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2$.)

- (a) Welche Ordnung hat P_{11} ?
- (b) Zeigen Sie, dass P_{11} ein Normalteiler von G ist.
- (c) Sei Q_5 eine Sylow-5-Untergruppe der Quotientengruppe G/P_{11} . Zeigen Sie, dass Q_5 ein Normalteiler von G/P_{11} ist.
- (d) Sei $\pi: G \rightarrow G/P_{11}$ die kanonische Abbildung und sei $N := \pi^{-1}(Q_5)$. Bestimmen Sie die Ordnung von N .
- (e) Zeigen Sie, dass $\{e\} \leq P_{11} \leq N \leq G$ eine Auflösung von G ist. (Listen Sie alles auf, was dafür geprüft werden muss und prüfen Sie dies.)
Zur Erinnerung: Wir hatten in der Vorlesung gesehen, dass Gruppen der Ordnungen p und p^2 abelsch sind, für Primzahlen p . (Dies können Sie verwenden.)

Aufgabe 3 (1+1+1+2+1):

Wir arbeiten im Ring $\mathbb{R}[x]$.

- (a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $f := x^5 + x^3$.
- (b) Geben Sie zwei verschiedene maximale Ideale von $\mathbb{R}[x]$ an, die f enthalten.
- (c) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}[x]$ keine weiteren maximalen Ideale existieren, die f enthalten.
- (d) Sei $g := x^3 - 2x$. Zeigen Sie, dass das Ideal (f, g) maximal ist.
- (e) Geben Sie einen Erzeuger vom Schnitt $(f) \cap (g)$ an.

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1+1):

Sei $f := x^5 - 9x - 12 \in \mathbb{Q}[x]$ und sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f .

- (a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.
- (b) Geben Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ an.
- (c) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass der Grad $[\mathbb{Q}(ra + a^2) : \mathbb{Q}]$ nicht von r abhängt und bestimmen Sie diesen Grad.
- (d) Zeigen Sie: Ist $r' > 0$ eine rationale Zahl mit $\sqrt[3]{r'} \in \mathbb{Q}(a)$, so ist auch $\sqrt[3]{r'}$ bereits rational.
- (e) Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass das Polynom f genau eine reelle Nullstelle hat. Sei b diese Nullstelle. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(b)$ nicht der Zerfällungskörper von f ist.
- (f) Sei nun $b' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine nicht-reelle Nullstelle von f . Begründen Sie, dass auch $\mathbb{Q}(b')$ nicht der Zerfällungskörper von f ist.

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1+1):

- (a) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$ normal?

Zur Erinnerung: $\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$ ist eine primitive 7-te Einheitswurzel.

- (b) Begründen Sie, dass sich jedes Element von $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ eindeutig in der Form $r_0 + r_1\zeta_7 + \cdots + r_5\zeta_7^5$ mit $r_0, \dots, r_5 \in \mathbb{Q}$ schreiben lässt.
- (c) Drücken Sie $a := \zeta_7 + \zeta_7^6$ in der Form aus (b) aus und begründen Sie, dass $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] > 1$ ist.
- (d) Sei $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q})$ definiert durch $\sigma(\zeta_7) = \zeta_7^6$. Zeigen Sie, dass $\sigma(a) = a$ ist.
- (e) Sei $F := \text{Fix}(\langle \sigma \rangle) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_7)$ (wobei $\langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q})$ ist). Zeigen Sie, dass σ^2 die Identität auf $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ ist und bestimmen Sie den Grad $[F : \mathbb{Q}]$.
- (f) Zeigen Sie, dass $F = \mathbb{Q}(a)$ ist.

Hinweis: Eine Inklusion ist leicht zu begründen. Danach kann man Grade vergleichen.