

Aufgabe 1 (keine Punkte):

Sei $K \subseteq L$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $\text{Aut}(L/K) \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$ und geben Sie für alle auftretenden Körpererweiterungen die Grade an.

Aufgabe 2 (keine Punkte):

Sei $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation und $H := \langle \sigma \rangle \leq \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Bestimmen Sie $\text{Fix } \sigma$.

Aufgabe 3 (keine Punkte):

Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G und seien H_1 und H_2 Untergruppen von G . Zeigen Sie, dass $\text{Fix}(H_1 \cap H_2)$ der kleinste Unterkörper von L ist, der $\text{Fix}(H_1)$ und $\text{Fix}(H_2)$ enthält.

Aufgabe 4 (keine Punkte):

Begründen Sie kurz, dass die beiden Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}) \text{ und } \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

galoisch sind und bestimmen Sie die zugehörigen Galois-Gruppen.

Aufgabe 5 (keine Punkte):

- (a) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{3})$ normal ist.
- (b) Ist auch die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt[4]{3})$ normal?
- (c) Zeigen Sie, dass ein Automorphismus $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ existiert, der sich nicht zu einem Automorphismus in $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q})$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 6 (keine Punkte):

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad 4 mit vier verschiedenen Nullstellen $a_1, \dots, a_4$ und sei $L = K(a_1, \dots, a_4)$ der Zerfällungskörper von f . Zeigen Sie:

- (a) Das Element $b := a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5$ liegt in K .
Hinweis: Was lässt sich über $\sigma(b)$ sagen für $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$?
- (b) $[K(a_1 + a_2) : K] \leq 6$.
Hinweis: Auf welche Elemente von L (oder von K^{alg}) kann $a_1 + a_2$ durch Automorphismen von L (oder von K^{alg}) abgebildet werden?

Aufgabe 7 (keine Punkte):

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und sei $L \supseteq K$ der Zerfällungskörper von f .

- (a) Zeigen Sie: Die Galoisgruppe $\text{Aut}(L/K)$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ oder isomorph zu S_3 .
- (b) Geben Sie für die beiden Fälle aus (a) jeweils ein Beispiel an.
Hinweis: Für S_3 haben Sie schon Beispiele gesehen. Danach lassen sich mit dem Hauptsatz der Galois-Theorie auch für beliebige Untergruppen $H \leq S_3$ Beispiele von Körpererweiterungen mit Galois-Gruppe H finden.

Aufgabe 8 (keine Punkte):

Sei L/K eine Galois-Erweiterung vom Grad 90. Zeigen Sie, dass es (mindestens) einen Zwischenkörper F mit $[F : K] = 10$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie die Existenz von p -Sylow-Untergruppen für geeignetes p .

Aufgabe 9 (keine Punkte):

Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit $[L : K] = 125$. Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper F gibt mit $[F : K] = 5$ und so dass F/K normal ist.

Hinweis: Auflösbarkeit von p -Gruppen ist nützlich.