Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2026

Algebra – Blatt 9

Abgabe bis 22.6.2026, 8:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1+2+2 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir mit den Mitteln der Vorlesung einen Körper mit 9 Elementen konstruieren.

(a) Zeigen Sie: Ist K ein Körper und $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad 2 ohne Nullstellen in K, so ist f irreduzibel.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom $f := x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ irreduzibel ist. (Hierbei ist $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ der Körper mit 3 Elementen.)
Hinweis: Prüfen Sie für jedes $a \in \mathbb{F}_3$, ob $f(a) = 0$ ist.

(c) Folgern Sie (mit einem Satz aus der Vorlesung), dass $\mathbb{F}_3[x]/(f)$ ein Körper ist (für f aus (b)).
Dieser Körper wird üblicherweise mit $\mathbb{F}_9$ bezeichnet.

(d) Ist $\mathbb{F}_9$ isomorph zu $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?

(e) Begründen Sie, dass die Elemente von $\mathbb{F}_9$ gegeben sind durch $\{a + b\bar{x} \mid a, b \in \mathbb{F}_3\}$ und geben Sie die Kardinalität von $\mathbb{F}_9$ an.
Hinweis: Sie können ein Beispiel aus Abschnitt 2.2 zitieren, aus dem das direkt folgt.

(f) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_9$ die Gleichung $\bar{x}^2 = -1$ gilt und leiten Sie daraus eine Formel für $(a + b\bar{x}) \cdot (c + d\bar{x})$ her.
Hinweis: $\bar{x}^2 = -1$ ist äquivalent zu $\bar{x}^2 + 1 = 0$.

(g) Wenn wir in (c) $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{F}_3$ nehmen (und weiterhin $f = x^2 + 1$): Erhalten wir dann auch einen Körper $\mathbb{R}/(f)$? Wenn ja: Kennen Sie diesen Körper bereits?

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte):

Wir hatten in Blatt 6, Aufgabe 6 und Blatt 7, Aufgabe 4 bereits den Ring $\{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ untersucht. Eine übliche Notation für diesen Ring ist $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

(a) Bestimmen Sie die Einheiten in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

(b) Bestimmen Sie die irreduziblen Elemente in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ faktoriell ist, indem Sie überprüfen, dass Primfaktorzerlegungen existieren und eindeutig sind.

Hinweis: Für all diese Teilaufgaben ist es nützlich, die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$ zu nutzen.

Aufgabe 3 (3+1+1+2 Punkte):

(a) In der Vorlesung wurde nach dem Beweis von Lemma 2.5.11 erwähnt, dass wir nebenbei gezeigt haben:
In Hauptidealringen R gilt: Zwei Elemente a, b sind teilerfremd genau dann, wenn das Ideal (a, b) schon der ganze Ring ist.
Schreiben Sie den Beweis davon nochmal separat auf.

(b) Zeigen Sie, dass in faktoriellen Ringen R gilt: Sind $a, b \in R$ teilerfremd, so ist $(a) \cap (b) = (ab)$.

(c) Folgern Sie (mit Hilfe eines Satzes aus Abschnitt 2.3):
Ist R ein Hauptidealring und sind $a, b \in R$ teilerfremd, so hat man einen Ringisomorphismus $R/(ab) \to R/(a) \times R/(b)$.

(d) Benutzen Sie (c) um zu zeigen, dass $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1)$ isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.