Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2026

# Algebra – Blatt 8

**Abgabe bis 15.6.2026, 8:30 Uhr im Ilias**

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Anmerkung: Auf diesem Übungsblatt dürfen Sie den Hauptsatz der Algebra verwenden, auch wenn wir ihn noch nicht bewiesen haben. Zur Erinnerung: Eine Version des Hauptsatzes der Algebra besagt: Jedes normierte Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ lässt sich in der Form $\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ schreiben, für geeignete $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

**Aufgabe 1 (2 Punkte):**

Sei $R$ ein Integritätsbereich und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie: $a$ und $b$ sind assoziiert zueinander genau dann, wenn die davon erzeugten Hauptideale $(a)$ und $(b)$ gleich sind.

Anmerkung: Eine Richtung wurde bereits in der Vorlesung gezeigt (und kann einfach zitiert werden).

**Aufgabe 2 (2+2 Punkte):**

(a) Bestimmen Sie alle Nullteiler im Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale im Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 3 (2 Punkte):**

Zeigen Sie: Jedes Element von $f \in \mathbb{C}(x) \setminus \{0\}$ lässt sich in der Form

$$z \cdot \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)^{r_i}$$

schreiben, für paarweise verschiedene $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $r_i \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}^\times$.

**Aufgabe 4 (2 Punkte):**

Sei $R = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x] \mid a_1 = 0\}$ der Ring der Polynome ohne $x^1$-Monom. Für welche $k, \ell \geq 2$ sind die Polynome $x^k$ und $x^\ell$ teilerfremd?

**Aufgabe 5 (1+3 Punkte):**

(a) Zeigen Sie: Die irreduziblen Elemente von $\mathbb{C}[x]$ sind genau die Polynome vom Grad 1.

(b) Sei $f = ax + b \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad $\deg f \leq 1$. Unter welchen Bedingungen an $a$ und $b$ ist $f$ irreduzibel?

**Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte):**

Ist $R$ ein Integritätsbereich, $S \subseteq R$ ein Unterring und $a \in S$, so macht es für die Irreduzibilität von $a$ einen Unterschied, ob man $a$ als Element von $R$ oder als Element von $S$ auffasst. Geben Sie Beispiele der folgenden Art an:

(a) $a$ ist irreduzibel als Element von $R$ aber nicht irreduzibel als Element von $S$.

(b) $a$ ist irreduzibel als Element von $S$ aber eine Einheit als Element von $R$.

(c) $a$ ist irreduzibel als Element von $S$, lässt sich aber in $R$ als Produkt von zwei nicht-Einheiten schreiben.