Algebra – Blatt 7

Abgabe bis 8.6.2026, 8:30 Uhr im Ilias

Aufgabe 1 (1+1 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Ist R ein Ring der Charakteristik $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ mal}} = 0$ für alle $a \in R$.

(b) Bestimmen Sie die Charakteristik des Rings $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(6)$.

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte):

Wir arbeiten im Ring $\mathbb{Z}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass das Ideal $(3, x)$ kein Hauptideal ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Ideal $(3, x)$ maximal ist.

(c) Seien $f = x^2 + 3x + 2$ und $g = x^3 + x^2 + x + 1$. Zeigen Sie, dass (f, g) ein Hauptideal ist und geben Sie einen Erzeuger an.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst ein weiteres Polynom h_1 vom Grad 2 in $\mathfrak{a}$, indem Sie ein geeignetes Vielfaches von f von g abziehen. Danach sollten Sie aus f und h_1 ein Polynom h_2 vom Grad 1 erhalten können, das in $\mathfrak{a}$ liegt. Zeigen Sie, dass f und g in (h_2) liegen.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte):

Sei R ein Ring, $a \in R$ und sei $\mathrm{ev}_a \colon R[x] \to R, f \mapsto f(a)$ die Evaluationsabbildung an a (aus Beispiel 2.2.4).

(a) Geben Sie ein Polynom $f \in R[x]$ vom Grad 1 an, das im Kern von ev_a liegt.

(b) Zeigen Sie: $\ker \mathrm{ev}_a = (f)$ (für Ihr f aus (a)).

(c) Wenden Sie den Homomorphiesatz auf ev_a an; welche beiden Ringe sind demnach isomorph zueinander?

Aufgabe 4 (1+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $S := \{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[x]/(2x - 1)$ isomorph zu S ist.
Hinweis: Wenden Sie den Homomorphiesatz auf einen geeigneten Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}[x]$ nach $\mathbb{Q}$ an.

Aufgabe 5 (2+2+1 Punkte):

Seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd und seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ beliebig.

(a) Bestimmen Sie den Schnitt $(m_1) \cap \cdots \cap (m_k)$ der Ideale $(m_i) \lhd \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie: Es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$n \equiv a_1 \mod m_1 \ , \quad \ldots \quad , \ n \equiv a_k \mod m_k \tag{$\star$}$$

Hinweis: Wenden Sie den chinesischen Restsatz an auf $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(m_k)$.

(c) Wenn man schon ein $n \in \mathbb{Z}$ gefunden hat, das $(\star)$ erfüllt, wie lassen sich dann alle $n' \in \mathbb{Z}$ bestimmen, die $(\star)$ erfüllen?

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Bestimmen Sie die Einheiten des Rings $\mathbb{Z}/(12)$.