

(Wie in der Vorlesung angekündigt, ist mit „Ring“ immer kommutativer Ring mit 1 gemeint.)

**Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte):**

Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{Z}[x]$  sind Unterringe? Welche sind Ideale?

- (a)  $\{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid a_0 = 0\}$
- (b)  $\{\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \mid a_1 = 0\}$
- (c)  $\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg f \leq 3\}$

**Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte):**

Sei  $R$  ein Ring. Welche der folgenden Abbildungen sind immer Ringhomomorphismen?

- (a)  $R \rightarrow R \times R, r \mapsto (r, r)$
- (b)  $R[x] \rightarrow R[x], \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^{i+1}$
- (c)  $R[x] \rightarrow R[x], \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^{2i}$

**Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte):**

Sei  $R$  ein Ring und  $f \in R[x]$  ein Polynom vom Grad  $n = \deg f \geq 2$ . Wir betrachten das Ideal  $\mathfrak{a} = fR[x]$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a) Jedes Polynom  $g \in R[x]$  mit  $\deg g \geq n$  liegt in  $\mathfrak{a}$ .
- (b) Jedes Polynom  $g \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$  hat Grad  $\deg g \geq n$ .
- (c) Zu jedem  $m \geq n$  existiert ein  $g \in \mathfrak{a}$  mit  $\deg g = m$ .

**Aufgabe 4 (1 Punkte):**

Zeigen Sie: Jeder Körper besitzt (als Ring aufgefasst) genau zwei Ideale.

**Aufgabe 5 (1+1+2+2 Punkte):**

Sei  $R$  ein Ring und sei  $K \subseteq R$  ein Unterring, der ein Körper ist.

- (a) Zeigen Sie, dass dann  $R$  ein  $K$ -Vektorraum ist (mit einer auf naheliegende Weise definierten Skalarmultiplikation).
- (b) Sei nun  $\mathfrak{a} \triangleleft R$  ein Ideal. Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{a}$  ein Untervektorraum (von  $R$ , aufgefasst als  $K$ -Vektorraum) ist.
- (c) Geben Sie im Fall  $R = K[x]$  und  $\mathfrak{a} = (1 + x^2)R$  eine Basis von  $\mathfrak{a}$  (als  $K$ -Vektorraum) an.
- (d) Für  $R, \mathfrak{a}$  wie in (c): Geben Sie Vektoren aus  $R$  an, die Ihre Basis von  $\mathfrak{a}$  zu einer Basis von  $R$  ergänzen.

**Aufgabe 6 (1+1+2 Punkte):**

- (a) Zeigen Sie, dass  $S := \{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  ein Unterring von  $\mathbb{Q}$  ist.
- (b) Zeigen Sie: Ist  $\mathfrak{a}$  ein Ideal von  $S$ , so ist  $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$  ein Ideal von  $\mathbb{Z}$ .
- (c) Zeigen Sie, dass die Ideale  $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$  von  $\mathbb{Z}$ , die man in (b) erhält, genau diejenigen Ideale  $n\mathbb{Z}$  sind, bei denen  $n$  ungerade oder 0 ist.