

**Aufgabe 1 (1+1 Punkte):**

Sei  $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ .

- Benutzen Sie Bemerkung 1.8.5, um die Anzahl der 3-Sylow-Untergruppen von  $G$  zu bestimmen.
- Geben Sie eine 3-Sylow-Untergruppe von  $G$  an.

**Aufgabe 2 (1+1 Punkte):**

Sei  $p$  eine Primzahl und

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Sie dürfen wieder (wie in Blatt 3, Aufgabe 3) ohne Beweis verwenden, dass  $G$  eine Untergruppe von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  ist. Um Ihnen Rechenarbeit zu ersparen ist hier die Formel für Produkte von Elementen von  $G$ :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie mit Hilfe der Sylow-Sätze, dass  $G$  einen Normalteiler der Ordnung  $p$  hat.
- Geben Sie diesen Normalteiler explizit an.

**Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):**

Wir wollen in dieser Aufgabe die Gruppen der Ordnung 45 klassifizieren (d. h. alle solche Gruppen bis auf Isomorphismus bestimmen). Sei also  $G$  eine solche Gruppe.

- Zeigen Sie, dass  $G$  einen Normalteiler  $N$  der Ordnung 9 und einen Normalteiler  $N'$  der Ordnung 5 besitzt.  
Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.
- Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$G \rightarrow G/N \times G/N', a \mapsto (a + N, a + N')$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Hinweis: Das gleiche Argument kam schon auf dem vorigen Übungsblatt vor.

- Benutzen Sie Blatt 4, Aufgabe 3 und setzen Sie alles zusammen, um jede Gruppe mit 45 Elementen als Produkt von zyklischen Gruppen zu schreiben. Wie viele nicht-isomorphe solche Gruppen gibt es?

**Aufgabe 4 (1+2+2+1+2+2 Punkte):**

Sei  $p \geq 3$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $2p$ . Sei  $s_2$  die Anzahl der Sylow-2-Untergruppen von  $G$  und  $s_p$  die Anzahl der Sylow- $p$ -Untergruppen.

- Zeigen Sie:  $s_p = 1$  und  $s_2 \in \{1, p\}$ .
- Prüfen Sie, dass dies für die zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}/(2p)\mathbb{Z}$  und die Diedergruppe  $D_p$  stimmt. (Was ist jeweils  $s_2$ ?)

Wir wollen nun zeigen, dass jede Gruppe  $G$  der Ordnung  $2p$  zu einer der beiden Gruppen aus (b) isomorph ist.

- Falls  $s_2 = 1$ : Benutzen Sie ein Argument wie in Aufgabe (3) (a)+(b), um einen Isomorphismus  $G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  zu finden und zeigen Sie dann, dass die Gruppe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  bereits zyklisch ist (z. B. indem Sie ein Element  $a$  angeben mit  $2a \neq 0$  und  $pa \neq 0$ ).

Ab jetzt nehmen wir  $s_2 = p$  an. Außerdem wählen wir einen Erzeuger  $\sigma$  der Sylow- $p$ -Untergruppe und einen Erzeuger  $\tau$  einer beliebigen Sylow-2-Untergruppe.

- Zeigen Sie, dass jedes Element von  $G \setminus \langle \sigma \rangle$  Ordnung 2 hat.  
Hinweis: Wie viele Elemente der Ordnung 2 liegen in allen Sylow-2-Untergruppen zusammen?
- Zeigen Sie, dass für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:  $\tau \sigma^k \tau^{-1} = \sigma^{-k}$ .  
Hinweis: Was kann man mit (e) über  $\tau \sigma^k$  sagen?
- Begründen Sie, dass sich jedes Element von  $G$  schreiben lässt in der Form  $\tau^j \sigma^k$ , für  $j \in \{0, 1\}, k \in \{0, \dots, p-1\}$ , zeigen Sie, dass das Produkt von zwei solchen Elementen schon eindeutig festgelegt ist (durch das, was wir über  $G$  wissen) und begründen Sie, dass daraus folgt, dass  $G$  isomorph zu  $D_p$  ist.