

Aufgabe 1 (2+1+1 Punkte):

Wir betrachten nochmal die Diedergruppe

$$D_n = \langle \sigma, \tau \rangle \leq S_n \quad \text{mit} \quad \sigma = \overbrace{1, \dots, n}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

von Blatt 3, Aufgabe 4. Wir nehmen $n \geq 3$ an.

- Zeigen Sie: Von den Untergruppen $\langle \sigma \rangle$ und $\langle \tau \rangle$ ist eine ein Normalteiler und die andere nicht. (Welche ist der Normalteiler?)
Hinweis: Beides lässt sich aus Blatt 3, Aufgabe 4 (a) folgern.
- Wir bezeichnen nun mit N diejenige der beiden obigen Gruppen, die ein Normalteiler ist. Zeigen Sie, dass G/N zyklisch ist.
- Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (a) und (b), um eine Auflösung von D_n anzugeben.

Aufgabe 2 (2+1 Punkte):

- Zeigen Sie: Ist $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ eine Gruppe, die von Elementen a_1, \dots, a_n erzeugt wird, so gilt für Elemente $b \in G$: b liegt im Zentrum von G genau dann, wenn b mit allen a_i kommutiert, d. h. wenn $ba_i = a_i b$ gilt für $i = 1, \dots, n$.
- Benutzen Sie (a), um das Zentrum der Diedergruppe D_4 zu bestimmen.

Aufgabe 3 (1+1+2+2+1 Punkte):

Sei p eine Primzahl. Wir wollen in dieser Aufgabe die Gruppen der Ordnung p^2 klassifizieren (d. h. alle solche Gruppen bis auf Isomorphismus bestimmen). Sei also G eine solche Gruppe.

- Begründen Sie, dass G abelsch ist (indem Sie einen Satz aus der Vorlesung zitieren).
- Wir nehmen an, dass in G kein Element der Ordnung p^2 existiert. Zeigen Sie, dass G mehrere verschiedene Untergruppen der Ordnung p hat.
- Sei G wie in (b) und seien nun $H, H' \leq G$ zwei verschiedene Untergruppen der Ordnung p . Zeigen Sie: Der Schnitt dieser beiden Gruppen ist trivial, d. h. $H \cap H' = \{e\}$.
- Seien $H, H' \leq G$ wie in (d). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$G \rightarrow G/H \times G/H', a \mapsto (a + H, a + H')$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Hinweis: Bestimmen Sie als erstes den Kern.

- Setzen Sie alles zusammen um zu zeigen, dass es bis auf Isomorphie nur zwei verschiedene Gruppen der Ordnung p^2 gibt. (Dazu müssen Sie sich überlegen, wie G aussieht, wenn die Annahme aus (b) nicht erfüllt ist, und wie die Gruppen G/H und G/H' aus (d) aussehen.)

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

- Zeigen Sie, dass $Z(H)$ keine Untergruppe von $Z(G)$ sein muss, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.
- Zeigen Sie, dass auch $Z(G)$ keine Untergruppe von $Z(H)$ sein muss, indem Sie auch dafür ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Ich hatte in der Vorlesung mal behauptet: Ist G eine Gruppe, $N \triangleleft G$ ein Normalteiler und $N' \triangleleft N$ ein Normalteiler davon, so muss N' kein Normalteiler von G sein. Dafür wollen wir nun ein Beispiel sehen: Sei $G = A_4$ und $V \triangleleft A_4$ die kleinsche Vierergruppe aus Bemerkung 1.5.14. Sie brauchen nicht zu prüfen, dass V ein Normalteiler von A_4 , aber:

Geben Sie einen Normalteiler $N' \triangleleft V$ an, so dass N' kein Normalteiler von G ist.