Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2026

Algebra – Blatt 3

Abgabe bis 11.5.2026, 8:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass S_n von zwei Elementen erzeugt wird.

Hinweis: Bestimmen Sie $\sigma^k \circ \tau \circ \sigma^{-k}$, für $\sigma = \overparen{1, \ldots, n}$ und $\tau = \overparen{1, 2}$ und benutzen Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Welche der folgenden Abbildungen $G \times X \to X$ sind Wirkungen der Gruppe G auf der Menge X?

(a) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}$, $\lambda_a(x) = a + x$ für $a \in \mathbb{R}^\times$ und $x \in \mathbb{R}$

(b) $G = \mathbb{Z}$, $X = \{0, 1\}$, $\lambda_a(x) = 0$ für $a \in \mathbb{Z}$ und $x \in \{0, 1\}$

(c) $G = S_4$, $X = \mathbb{R}^4$, $\lambda_\sigma(v) = A_\sigma v$ (wobei A_σ die Permutationsmatrix zu σ ist).

Aufgabe 3 (1+1+2+2 Punkte):

Sei $G := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$. Sie dürfen, ohne es nachzuprüfen, verwenden, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

Wir betrachten die natürliche Wirkung von G auf $\mathbb{R}^3$, d. h. $A \mapsto (v \mapsto Av)$.

(a) Geben Sie die Bahn von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

(b) Bestimmen Sie den Stabilisator von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Welche $v \in \mathbb{R}^2$ sind Fixpunkte?

(d) Beschreiben Sie sämtliche Bahnen dieser Operation.

Aufgabe 4 (1+3+1+1 Punkte):

Sei $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle \leq S_n$, für $\sigma = \overparen{1, \ldots, n}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: Wenn man σ mit τ konjugiert (also $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ berechnet) erhält man eine Potenz σ^k von σ. Was ist k?

(b) Zeigen Sie: G besteht aus $2n$ Elementen, nämlich σ^k und $\tau \circ \sigma^k$, jeweils für $k = 0, \ldots, n-1$.
Zu zeigen ist also, (i) dass all diese Elemente verschieden sind und (ii) dass man durch Verknüpfen von zwei Elementen dieser Form wieder ein Element dieser Form erhält.

(c) Wir betrachten nun die natürliche Wirkung von G auf $\{1, \ldots, n\}$. Wie viele Bahnen hat diese Operation und was ist die Kardinalität dieser Bahnen?

(d) Benutzen Sie (c), um die Ordnung von $\mathrm{Stab}_G(x)$ zu bestimmen, für $x = 1, \ldots, n$.

Anmerkung: Diese Gruppen D_n nennt man *Dieder-Gruppen*. (Aussprache: „Di-Eder-Gruppe".)

Aufgabe 5 (3 Punkte):

Die Gruppe $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ wirke auf einer Menge X.

(a) Was sind die möglichen Bahn-Längen einer solchen Wirkung?

(b) Zeigen Sie: Ist $\#X = 11$, so hat die Wirkung (mindestens) einen Fixpunkt.

(c) Wir nehmen nun an, dass $\#X = 13$ ist und dass die Wirkung keinen Fixpunkt hat. Bestimmen Sie die Längen der Bahnen.

Hinweis: Benutzen Sie die Bahnenformel.