Algebra – Blatt 2

Abgabe bis 4.5.2026, 8:30 Uhr im Ilias

Aufgabe 1 (1+1+2+2+2* Punkte):

(a) Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und sei $a \in G$ ein Element der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\operatorname{ord}(f(a)) \mid n$.

(b) Was kann man über die Ordnungen von a und von $f(a)$ sagen, wenn f ein Isomorphismus ist?

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.
Hinweis: Finden Sie ein n, so dass $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ Elemente der Ordnung n besitzt, aber nicht $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ isomorph sind.
Hinweis: Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $(1,1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Können Sie folgern, dass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ zyklisch ist?

(e*) *Bonus-Aufgabe:* Stellen Sie eine Vermutung auf, unter welchen Bedingungen an m und n die Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zyklisch ist und beweisen Sie diese Vermutung.

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte):

Sei $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung von $\overline{\frac{2}{3}} \in G$.

(b) Geben Sie alle Elemente von G der Ordnung 4 an.

(c) Zeigen Sie: Jedes Element von G hat endliche Ordnung.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

(a) In der Vorlesung hatten wir gesehen: Ist H ein Normalteiler, so gilt $aH = Ha$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie nun die Umkehrung, d. h.: Gilt $aH = Ha$ für alle $a \in G$, so ist H ein Normalteiler.

(b) Zeigen Sie nun: Ist $(G : H) = 2$, so muss H bereits ein Normalteiler sein.
Hinweis: Benutzen Sie (a); welche Links- und Rechtsnebenklassen gibt es?

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Seien G und H endliche Gruppen, deren Ordnungen teilerfremd sind (d. h. es gibt kein $n \geq 2$, das sowohl $\#G$ als auch $\#H$ teilt). Zeigen Sie: Der einzige Homomorphismus $f\colon G \to H$ ist der triviale, d. h. $f(a) = e$ für alle $a \in G$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Lagrange (sowohl für $\ker f$ als auch für $\operatorname{im} f$) und den Homomorphiesatz.

Aufgabe 5 (1+1+2 Punkte):

(a) Geben Sie die Zykelzerlegung des Elements

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$$

an.

(b) Liegt das σ aus (a) in A_8?

(c) Zeigen Sie: Ein Zyklus $\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_k} \in S_n$ liegt in A_n genau dann, wenn k ungerade ist.