

Aufgabe 1 (1+1 Punkte):

Mit dem Hauptsatz der Galois-Theorie lassen sich einige Aussagen über Gruppen in Aussagen über Galoissche Körpererweiterungen übersetzen. Übersetzen Sie auf diese Art die folgenden Resultate:

- (a) Satz 1.8.3 (c)
- (b) Korollar 1.8.9

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2 Punkte):

Sei L der Zerfällungskörper von $f = x^4 + 1$. Wir wollen $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ verstehen.

Bemerkung (um Ihnen Rechenarbeit zu ersparen): Da $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$, sind die Nullstellen von f genau diejenigen 8-ten Einheitswurzeln, die keine 4-ten Einheitswurzeln sind, also $\zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^5, \zeta_8^7$.

- (a) Sei $\alpha := \zeta_8 + \zeta_8^7$. Berechnen Sie α^2 und geben Sie dann das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ an.
- (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ und $L/\mathbb{Q}(\alpha)$ jeweils echte Körpererweiterungen sind und bestimmen Sie dann $[L : \mathbb{Q}]$.
- (c) Begründen Sie, dass für jedes $k \in \{1, 3, 5, 7\}$ genau ein $\sigma_k \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ existiert mit $\sigma(\zeta_8) = \zeta_8^k$ und dass dies bereits alle Elemente von $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ sind.
- (d) $\sigma_3 \circ \sigma_3$ sollte also gleich σ_k sein, für ein geeignetes k . Bestimmen Sie dieses k , indem Sie $\sigma_3(\zeta_8^3)$ berechnen.
- (e) Bestimmen Sie auf analoge Weise auch $\sigma_5 \circ \sigma_5$ und $\sigma_7 \circ \sigma_7$.
- (f) Folgern Sie, dass $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.
Erinnerung: In Blatt 4, Aufgabe 3 hatten Sie gezeigt, dass jede Gruppe der Ordnung p^2 (für p prim) entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.
- (g) Sei nun $H := \langle \sigma_3 \rangle$ die von σ_3 erzeugte Untergruppe von $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$. Wir wollen den Fixkörper $\text{Fix}(H)$ bestimmen. Zeigen Sie dazu zunächst, dass $\beta := \zeta_8 + \zeta_8^3$ von σ_3 auf sich selbst abgebildet wird.
- (h) Zeigen Sie, dass β nicht in $\mathbb{Q}$ liegt und folgern Sie, dass $\text{Fix}(H) = \mathbb{Q}(\beta)$ ist. (Eine Inklusion sollte klar sein; die andere kann man dann an den Graden $[\text{Fix}(H) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ ablesen.)
- (i) Nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie sollte auch der obige Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ einer Untergruppe von $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ entsprechen. Welcher?
- (j) Da die von σ_3 , σ_5 und σ_7 erzeugten Untergruppen von $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ alle drei verschieden sind, sollte es noch einen dritten Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\gamma)$ geben. Diesmal funktioniert $\gamma = \zeta_8 + \zeta_8^5$ jedoch nicht. Warum nicht?
- (k) Zeigen Sie, dass man in diesem Fall statt dessen $\gamma = \zeta_8 \cdot \zeta_8^5$ nehmen kann.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+1 Punkte):

Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5 \sqrt[5]{2})$ der Zerfällungskörper von $x^5 - 2$ (vgl. Blatt 11, Aufgabe 5 und Blatt 12, Aufgabe 3). Laut Bemerkung 3.6.3 haben wir eine Gruppenwirkung von $\text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ auf $X = \{\sqrt[5]{2}, \zeta_5 \sqrt[5]{2}, \zeta_5^2 \sqrt[5]{2}, \zeta_5^3 \sqrt[5]{2}, \zeta_5^4 \sqrt[5]{2}\}$.

- (a) Zeigen Sie dass diese Gruppenwirkung transitiv (siehe Definition 1.6.8) ist.
Hinweis: Sie können z. B. 3.3.10, 3.3.9 und 3.4.5 kombinieren.
- (b) Sei nun $H := \{\sigma \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q}) \mid \sigma(\sqrt[5]{2}) = \sqrt[5]{2}\}$.
Zeigen Sie, dass H transitiv auf der Menge $X' := X \setminus \{\sqrt[5]{2}\}$ wirkt.
Hinweis: Aus den älteren Übungsaufgaben zu L sollten Sie folgern können, dass alle Elemente von X' das selbe Minimalpolynom über $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ haben.
- (c) Zeigen Sie: Sind $a, b \in X$ verschieden, so existiert ein $\sigma \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\sqrt[5]{2}) = a$ und $\sigma(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = b$.
Hinweis zur Existenz von σ : Wenn Sie schon ein σ_1 gefunden haben mit $\sigma_1(\sqrt[5]{2}) = a$, kann man versuchen, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ zu setzen. Welche Eigenschaften muss σ_2 haben, damit σ wie gewünscht wird?
- (d) Geben Sie eine einfache Begründung dafür an, dass das $\sigma \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ aus (c) durch a und b bereits eindeutig festgelegt ist.
- (e) Wir wählen nun $\sigma_0 \in \text{Aut}(L/\mathbb{Q})$ so, dass $\sigma_0(\sqrt[5]{2}) = \zeta_5^3 \sqrt[5]{2}$ und $\sigma_0(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = \zeta_5^2 \sqrt[5]{2}$ ist. Geben Sie die Zykelzerlegung vom Bild von σ_0 in $\text{Sym}(X)$ an.
Hinweis: Benutzen Sie, dass σ_0 ein Körperautomorphismus ist. Es ist nützlich, zunächst $\sigma_0(\zeta_5)$ zu berechnen.
- (f) Bestimmen Sie die Ordnung von σ_0 und dann den Grad der Körpererweiterung $\text{Fix}(\langle \sigma_0 \rangle)/\mathbb{Q}$.