

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $L/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung vom Grad 2, so existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.

Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom eines beliebigen Elements $b \in L \setminus \mathbb{Q}$ und benutzen Sie die Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Sie sollten so ein $a \in \mathbb{Q}$ finden mit $b \in \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $K(a)/K$ eine algebraische Körpererweiterung und sei f das Minimalpolynom von a über K . Zeigen Sie: Die Anzahl $\# \text{Aut}(K(a)/K)$ der Automorphismen von $K(a)$ über K ist gleich der Anzahl der Nullstellen von f in $K(a)$.

Hinweis: Lemma 3.3.10 sieht etwas ähnlich aus. Sie können das Lemma entweder verwenden oder den Beweis des Lemmas kopieren und anpassen.

Hinweis: Das Resultat aus Aufgabe 2 ist für die beiden nachfolgenden Aufgaben sehr nützlich – fast jedes Mal, wenn es um Automorphismen geht.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+2 Punkte):

(a) Bestimmen Sie $\# \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q})$.

(b) Gibt es einen Automorphismus $\sigma_1 \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q})$, der $\sqrt[5]{2}$ auf $(\sqrt[5]{2})^2$ abbildet? Wenn ja, wohin wird $(\sqrt[5]{2})^2$ von σ_1 abgebildet?

Hinweis: Hier und auch bei allen folgenden „wohin wird ... abgebildet“-Fragen brauchen Sie nur zu verwenden, dass σ_i mit Addition und Multiplikation kompatibel ist.

(c) Bestimmen Sie $\# \text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$.

(d) Gibt es einen Automorphismus $\sigma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$, der ζ_5 auf ζ_5^2 abbildet? Wenn ja, wohin wird ζ_5^2 von σ_2 abgebildet?

(e) Sei L der Zerfällungskörper von $x^5 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $[L : \mathbb{Q}] = 20$ ist. ... indem Sie begründen, dass dies bereits in einer früheren Übungsaufgabe berechnet wurde.

(f) Bestimmen Sie $\# \text{Aut}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}))$.

Hinweis: Sei g das Minimalpolynom von $\zeta_5 \sqrt[5]{2}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$. Mit Hilfe der unter (e) erwähnten früheren Übungsaufgabe können Sie den Grad von g bestimmen und auch, wie viele Nullstellen von g in L liegen.

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1+1+2+1 Punkte):

(a) Für welche Elemente $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist $a^2 \in \mathbb{Q}$? (Drücken Sie a in der Form aus Bemerkung 3.2.2 aus.)

(b) Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und bestimmen Sie so das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Hinweis: Was sind die Quadrate der Elemente a aus (a)?

(c) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.

(d) Folgern Sie, dass die Elemente $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ eine $\mathbb{Q}$ -Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ bilden.

Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 3.2.2 zuerst für $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und dann für $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

(e) Sei f das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\deg f = 4$ ist.

Hinweis: An (c) kann man ablesen, dass die Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ nur drei mögliche Grade haben können. Benutzen Sie (d), um zwei dieser drei Grade auszuschließen.

(f) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

(g) Zeigen Sie, dass für $e, e' \in \{1, -1\}$ jeweils ein Automorphismus $\sigma_{e,e'} \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ existiert, der $\sqrt{2}$ auf $e\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ auf $e'\sqrt{3}$ abbildet.

Hinweis: Suchen Sie $\sigma_{1,-1}$ in $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.

(h) Folgern Sie, dass die Nullstellen vom Polynom f aus (e) genau $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ sind. Was können Sie über den Zerfällungskörper von f sagen?