

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei p eine Primzahl und sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad p . Zeigen Sie, dass für jedes $a \in L \setminus K$ gilt: $L = K(a)$.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 3.1.6.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Bestimmen Sie das Minimalpolynom der komplexen Zahl $z := 1 + i$ über $\mathbb{Q}$.

Hinweis: Man kann das auch so sehen: Gesucht ist eine $\mathbb{Q}$ -Linearkombination von Potenzen von z , die 0 ergibt. (Sie brauchen dafür keine besonders hohen Potenzen von z .)

Aufgabe 3 (1 Punkte):

Sei p eine Primzahl, so dass $p - 1$ keine Zweierpotenz ist. Zeigen Sie, dass das regelmäßige p -Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Hinweis: Sie müssen nur zwei Resultate aus der Vorlesung zusammensetzen.

Aufgabe 4 (1+1+1+1 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ bestimmen.

- Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. (Hier ist wirklich „gleich“, und nicht nur „isomorph“ gemeint. Zu zeigen ist also, dass eine komplexe Zahl z in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ liegt genau dann, wenn sie in $\mathbb{Q}(-\sqrt{2})$ liegt.)
- Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ das gleiche Minimalpolynom f haben.
- Wenn man Satz 3.2.1 auf $\sqrt{2}$ anwendet, erhält man (aus dem Beweis) einen Isomorphismus $g_1: \mathbb{Q}[x]/(f) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Analog erhält man durch Anwenden des Satzes auf $-\sqrt{2}$ einen Isomorphismus $g_2: \mathbb{Q}[x]/(f) \rightarrow \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$. Bestimmen Sie $g_2(g_1^{-1}(\sqrt{2}))$ und zeigen Sie so, dass ein nicht-trivialer Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ existiert.
- Zeigen Sie, dass keine weiteren nicht-trivialen Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ existieren. Benutzen Sie dafür Lemma 3.1.13 und begründen Sie, dass jeder Automorphismus Nullstellen von f auf Nullstellen von f abbildet.

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1+1+2+1+1+1 Punkte):

Sei $f(X) := X^5 - 2$, und seien $\alpha_0, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f . Unser Ziel ist es, den Grad $[\mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_4) : \mathbb{Q}]$ zu bestimmen.

- Zeigen Sie: Die komplexen Nullstellen von f sind $\alpha_i = \zeta_5^i \sqrt[5]{2}$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.
- Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}]$ und beschreiben Sie alle Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ im Sinne von Bemerkung 3.2.2.
- Leider ist $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ noch nicht der gesuchte Körper $\mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$: Zeigen Sie, dass $\sqrt[5]{2}$ die einzige Nullstelle von f ist, die in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ liegt.
Hinweis: $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \subseteq \mathbb{R}$.
- Da f sowohl das Minimalpolynom von $\sqrt[5]{2}$ als auch das Minimalpolynom von $\zeta_5 \sqrt[5]{2}$ ist, scheint es, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ und $\mathbb{Q}(\zeta_5 \sqrt[5]{2})$ (nach Satz 3.2.1) beide gleich $\mathbb{Q}[x]/(f)$ sind. Bedeutet das nicht insbesondere, dass $\zeta_5 \sqrt[5]{2}$ ein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ sein muss? Wo ist der Denkfehler?
- Dann müssen wir die Konstruktion wohl nochmal machen: Wir arbeiten jetzt also über $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ und wollen $K(\zeta_5 \sqrt[5]{2})$ beschreiben. Da f irreduzibel ist und $\zeta_5 \sqrt[5]{2}$ als Nullstelle hat, muss es wohl das Minimalpolynom sein, d. h. $K(\zeta_5 \sqrt[5]{2})$ ist isomorph zu $K[x]/(f) \dots$ oder etwa nicht? Welcher Denkfehler wurde jetzt gemacht?
- Wenn wir in K arbeiten, ist $\sqrt[5]{2}$ eine Nullstelle von f . Teilen Sie diese Nullstelle mit Polynomdivision raus, um ein Polynom $g \in K[x]$ zu finden, so dass $g \cdot (x - \sqrt[5]{2}) = f$ gilt. (Schreiben Sie die Koeffizienten von g in der Form aus (c).)
- Wir haben jetzt ein Polynom $g \in K[x]$, dessen Nullstellen die $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ von oben sind, und keine dieser Nullstellen liegt in K . Was folgt daraus für den Grad $[K(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) : K]$? (Sie sollten rausfinden, dass nur zwei Werte für diesen Grad in Frage kommen.)
- Müssen wir jetzt mit den restlichen Nullstellen von f weiter machen, um $\mathbb{Q}(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$ zu finden? Nein, diesmal haben wir Glück: Zeigen Sie, dass $L := K(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5 \sqrt[5]{2})$ bereits alle Nullstellen von f enthält.
Hinweis: $\zeta_5 \in L$.
- Bestimmen Sie nun den Grad von $[L : \mathbb{Q}]$.
Hinweis: Aus (h) ergeben sich zunächst zwei Möglichkeiten, aber eine davon lässt sich unter Verwendung von Beispiel 3.2.9 ausschließen.